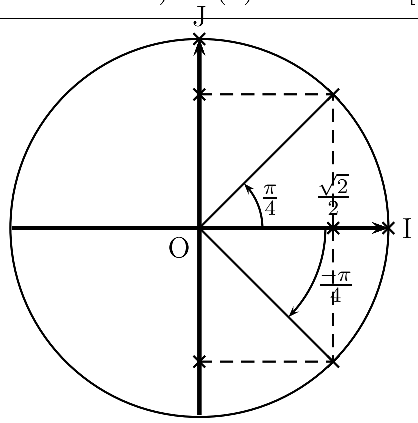
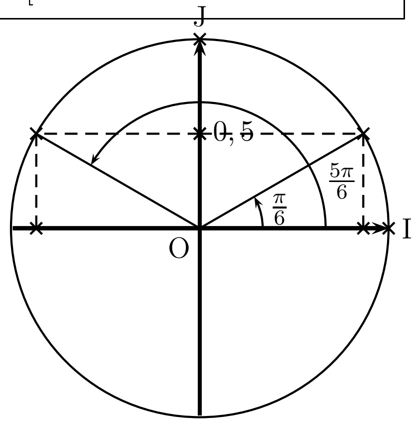
Exercice 1 — Partie Commune (Calculatrice : ✗) **2.5 points**

	✓			2.5	Résoudre les équations suivantes : a) $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0; 2\pi[$. b) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0,5$ dans $\mathbb{R}$. c) $\sin(x) = -3$ dans $[-2\pi; 2\pi[$.

1. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c'est une valeur remarquable, voir cercle trigonométrique de gauche. L'équation a donc comme solutions générales : $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$. Donc : dans $[0; 2\pi[$, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right\}}$.





2. $0,5$ est une valeur remarquable du sinus, voir cercle trigonométrique plus haut, à droite. Donc $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0,5$ a comme solutions générales : $x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Ce qui donne $x = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $x = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi = \dfrac{3\pi}{6} + 2k\pi = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$. Donc, les solutions sont $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$.
3. L'équation $\sin(x) = -3$ n'a aucune solution (le sinus d'un nombre est toujours entre -1 et 1). Donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

Exercice 2 — Partie Commune (Calculatrice : ✗) **1 point**

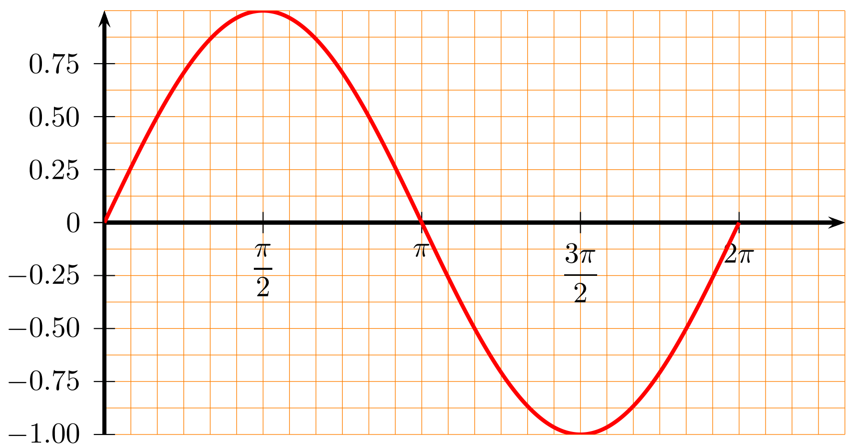
	✓			1	Résoudre dans $[2\pi; 4\pi[$ l'équation $\cos^2(x) = 1$.

$\cos^2(x) = 1$ est équivalente à $\cos(x) = \pm 1$. On a donc les solutions en deux parties :
$\cos(x) = 1$ a comme solutions $x = 0 + 2k\pi$; $\cos(x) = -1$ a comme solutions $x = \pi + 2k\pi$.
Donc, dans $[2\pi; 4\pi[$, les solutions sont $\boxed{\mathcal{S} = \{2\pi; 3\pi\}}$.

Exercice 3 — Partie Commune (Calculatrice : ✗) **1 point**

✓				1	Remplir le tableau de valeurs ci-dessous (on prendra $\sqrt{2} \approx 1,4$ et $\sqrt{3} \approx 1,8$). À l'aide du tableau, tracez la fonction sin pour x entre 0 et 2π dans le repère donné plus bas.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Valeur exacte de $\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Valeur de $\sin x$ approchée à $0,1$ près	0	$0,5$	$0,7$	$0,9$	1	0



⚠ Dans les calculs, j'utilise d'abord des résultats approchés obtenus aux questions précédentes pour continuer les calculs. Ces calculs ne donnent pas la valeur approchée à la précision demandée. Ce qui est certain, c'est qu'on vous aurait compté bon d'avoir fait de la sorte. Je vous montre ensuite qu'en utilisant les valeurs "les plus exactes possibles", on obtient des valeurs différentes à l'arrondi demandé (valeurs approchées, qui, elles, sont donc cette fois les bonnes à la précision demandée). Les calculs un peu plus fastidieux sont mis avec une barre noire sur le côté (comme ce paragraphe), pour que vous puissiez les passer quand vous réviserez pour le test B (c'est pour votre culture scientifique, on ne vous en tiendra pas rigueur le jour du test B).

Exercice 4 — Difficulé verte (Calculatrice : ✓) **1.5 point**

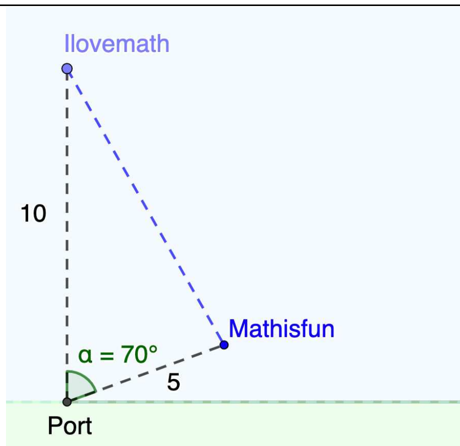
✓				0.5	1. Donner la formule permettant de calculer $\cos(a+b)$ en fonction des cosinus et sinus de a et b.
	✓			1	2. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$. On détaillera les étapes du calcul.

1. $\boxed{\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$

2. On va utiliser la formule $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$ avec $a=\frac{\pi}{3}$ et $b=\frac{\pi}{4}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

Exercice 5 — Difficulé verte (Calculatrice : ✓) **3 points**

					En raison des excellents résultats obtenus par tous les élèves de S5 au test B de décembre, l'école décide d'organiser un voyage de vacances en Nouvelle-Zélande. Les étudiants sont logés dans un hôtel 5 étoiles sur la côte. Un jour, un groupe d'étudiants décide de louer un catamaran et de visiter une belle île appelée "Ilovemath" située à 10 km au nord du port. Un autre groupe a loué des vélos aquatiques et a visité une autre île appelée "Mathifun" située à 5 km du port mais à un angle de 70° par rapport au nord, comme le montre le croquis ci-contre :  *Dans la suite, on arrondira les longueurs au km près, les angles au degré près, et les aires au km² près.*
	✓			1	1. Calculez la distance de l'île "Ilovemath" à l'île "Mathisfun".
	✓			1	2. Dans le triangle formé par le port et les deux îles, calculez l'angle situé à l'île "Ilovemath".
	✓			1	3. Calculez l'aire du triangle formé par le port et les deux îles.

Dans la suite, je vais renommer le triangle IMP pour plus de simplicité : le point I représente l'île "Ilovemath", le point M représente l'île "Mathisfun" et le point P représente le port.

1. Pour calculer la distance IM, on n'a pas le choix, il faut qu'on utilise le théorème d'al-Kashi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{IM}^2 &= \mathrm{IP}^2+\mathrm{PM}^2-2\mathrm{IP}\cdot\mathrm{PM}\cdot\cos\left(\widehat{\mathrm{P}}\right) && \text{On remplace par ce qu'on connaît}\\
\mathrm{IM}^2 &= 10^2+5^2-2\times10\times5\cos(70^\circ) && \text{On calcule}\\
\mathrm{IM}^2 &= 125-100\cos(70^\circ) && \text{Valeur approchée}\\
\mathrm{IM}^2 &\approx 90,79798567 && \text{On résout (une longueur est positive)}\\
\mathrm{IM} &\approx 9,528797703
\end{aligned}$$

En arrondissant à 1 km près, $\boxed{\mathrm{IM}\approx 10}$.

2. On nous demande l'angle $\widehat{\mathrm{I}}$, on peut utiliser la loi des sinus ou le théorème d'al-Kashi.
   - Avec al-Kashi :

$$\mathrm{PM}^2 = \mathrm{IP}^2 + \mathrm{IM}^2 - 2\mathrm{IP}\cdot\mathrm{IP}\cdot\cos\left(\widehat{\mathrm{I}}\right)$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$5^2 \approx 10^2 + 10^2 - 2\times 10\times 10\cos\left(\widehat{\mathrm{I}}\right)$$

On calcule

$$25 \approx 200 - 200\cos\left(\widehat{\mathrm{I}}\right)$$

-200

$$-175 \approx -200\cos\left(\widehat{\mathrm{I}}\right)$$

$\div(-200)$

$$0,875 \approx \cos\left(\widehat{\mathrm{I}}\right)$$

arccos

$$28,95502437 \approx \widehat{\mathrm{I}}$$

Donc $\boxed{\widehat{\mathrm{I}} \approx 29^\circ}$.

   - Avec la loi des sinus :

$$\frac{\sin\left(\widehat{\mathrm{I}}\right)}{\mathrm{PM}} = \frac{\sin\left(\widehat{\mathrm{P}}\right)}{\mathrm{IM}}$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$\frac{\sin\left(\widehat{\mathrm{I}}\right)}{5} \approx \frac{\sin(70^\circ)}{10}$$

$\times 5$

$$\sin\left(\widehat{\mathrm{I}}\right) \approx \frac{5\sin(70^\circ)}{10}$$

Valeur approchée

$$\sin\left(\widehat{\mathrm{I}}\right) \approx 0,4698463104$$

arcsin

$$\widehat{\mathrm{I}} \approx 28,02432067^\circ \text{ ou } 151,9756793^\circ$$

On obtient une valeur approchée $\boxed{28^\circ}$ différente qu'avec al-Kashi (la valeur 152° est évidemment à écarter, car avec un angle de 70° dans le triangle, ça dépasserait le total de 180°). Effectivement, la valeur approchée 10 n'a pas été utilisée de la même manière dans les calculs suivants, du coup les erreurs se sont propagées différemment. Impossible de savoir, à ce stade, quelle méthode donne "la valeur la plus proche" de l'angle.

- Pour obtenir la valeur la « plus exacte possible » on va utiliser la valeur exacte de IM ($\sqrt{125 - 100\cos(70^\circ)}$ ou bien $9,528797703$ qu'on avait trouvé, la calculatrice ne pourra pas faire plus précis de toute façon) :

$$\frac{\sin\left(\widehat{\mathrm{I}}\right)}{\mathrm{PM}} = \frac{\sin\left(\widehat{\mathrm{P}}\right)}{\mathrm{IM}}$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$\frac{\sin\left(\widehat{\mathrm{I}}\right)}{5} \approx \frac{\sin(70^\circ)}{9,528797703}$$

$\times 5$

$$\sin\left(\widehat{\mathrm{I}}\right) \approx \frac{5\sin(70^\circ)}{9,528797703}$$

Valeur approchée

$$\sin\left(\widehat{\mathrm{I}}\right) \approx 0,4930803707$$

arcsin

$$\widehat{\mathrm{I}} \approx 29,54324728^\circ \text{ ou } 150,4567527^\circ$$

(et ce n'est encore pas le même arrondi, on trouve $\boxed{30^\circ}$ au lieu de 29 ou 28 ; mais cette fois c'est le bon !)

3. Ici bien sûr on peut utiliser la formule du calcul de l'aire avec n'importe quelles valeurs puisque maintenant on connaît tout dans le triangle, mais pour éviter toute propagation de valeurs approchées, on va utiliser les valeurs de l'énoncé !
$\mathcal{A}(\mathrm{IPM}) = \frac{1}{2}\mathrm{IP}\times\mathrm{PM}\times\sin\left(\widehat{\mathrm{P}}\right) = \frac{1}{2}\times 10\times 5\times\sin(70^\circ) \approx \boxed{23\ \mathrm{km}^2}$

Exercice 6 — Difficulé bleue (Calculatrice : ✓) **1 point**

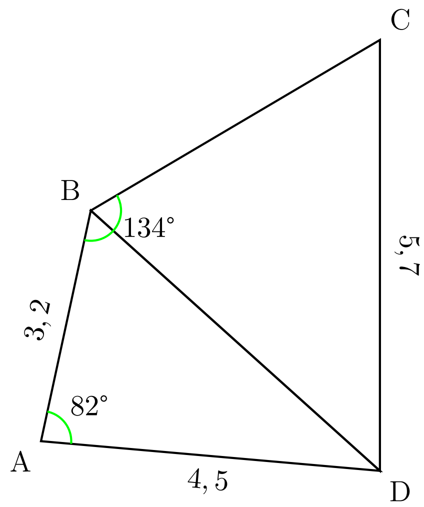
	✓			1	Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$. On détaillera les étapes du calcul.

Voir correction de l'exercice 4.

Exercice 7 — Difficulé bleue (Calculatrice : ✓) **4.5 points**

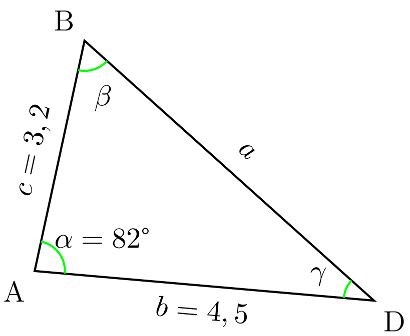
On considère le quadrilatère ABCD ci-contre, dans lequel on a tracé la diagonale BD. On donne :

- $\widehat{\mathrm{A}} = 82°$;
- $\widehat{\mathrm{ABC}} = 134°$;
- $\mathrm{AB} = 3,2$;
- $\mathrm{AD} = 4,5$;
- $\mathrm{CD} = 5,7$.



	✓			1	1. Donner une expression exacte de BD en fonction des données du problème.
	✓			0.5	2. Calculer BD à 0,1 près.
	✓			1	3. Donner une valeur approchée de $\widehat{\mathrm{ABD}}$ à un degré près.
	✓			1	4. Calculer $\widehat{\mathrm{C}}$ à un degré près.
	✓			1	5. Calculer l'aire du triangle ABD.

Je refais le dessin de BAD pour montrer les notations que je vais utiliser dans la suite :



1. Pour calculer BD, on se place dans le triangle ABD (on peut résoudre ce triangle car on y connaît 3 données indépendantes), avec les notations de la figure. On connaît deux longueurs de côtés et l'angle entre ces deux côtés connus, on utilise la relation d'al-Kashi pour connaître la longueur du troisième côté :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) && \text{On remplace par ce qu'on connaît} \\ a^2 &= 4,5^2 + 3,2^2 - 2 \times 4,5 \times 3,2\cos(82°) && \text{On calcule} \\ a^2 &= 30,49 - 28,8\cos(82°) && \text{On résout (une longueur est positive)} \\ a &= \boxed{\sqrt{30,49 - 28,8\cos(82°)}} \end{aligned}$$

2. Même sans avoir réussi à écrire l'expression exacte, on pouvait terminer le calcul de la manière suivante :

$$\begin{aligned} a^2 &= 30,49 - 28,8\cos(82°) && \text{Valeur approchée} \\ a^2 &\approx 26,481814692 && \text{On résout (une longueur est positive)} \\ a &\approx 5,146048454 \end{aligned}$$

En arrondissant à $0,1$ près, $\boxed{\mathrm{BD} \approx 5,1}$.

3. Pour calculer $\widehat{\mathrm{ABD}} = \beta$, on peut utiliser la loi des sinus ou le théorème d'al-Kashi.

- Avec al-Kashi :

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) && \text{On remplace par ce qu'on connaît} \\ 4,5^2 &\approx 5,1^2 + 3,2^2 - 2 \times 5,1 \times 3,2\cos(\beta) && \text{On calcule} \\ 20,25 &\approx 36,25 - 32,64\cos(\beta) && -36,25 \\ -16 &\approx -32,64\cos(\beta) && \div(-32,64) \\ 0,490196078 &\approx \cos(\beta) && \text{arccos} \\ 60,646529945 &\approx \beta \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\widehat{\mathrm{ABD}} \approx 61°}$.

• Avec la loi des sinus :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\beta)}{\mathrm{AD}} &= \frac{\sin(\alpha)}{\mathrm{BD}} && \text{On remplace par ce qu'on connaît}\\
\frac{\sin(\beta)}{4,5} &\approx \frac{\sin(82^\circ)}{5,1} && \times 4,5\\
\sin(\beta) &\approx \frac{4,5\sin(82^\circ)}{5,1} && \text{Valeur approchée}\\
\sin(\beta) &\approx 0,873765943 && \text{arcsin}\\
\beta \approx 60,899260151^\circ &\text{ ou } 119,100739849^\circ
\end{aligned}$$

On obtient la même valeur approchée qu'avec al-Kashi, mais les décimales sont différentes. Effectivement, la valeur approchée 5,1 n'a pas été utilisée de la même manière dans les calculs, et les erreurs se sont propagées différemment. Impossible de savoir, à ce stade, quelle méthode donne "la valeur la plus proche" de l'angle.

• Pour obtenir la valeur la "plus exacte possible" on va utiliser la valeur exacte de BD :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\beta)}{\mathrm{AD}} &= \frac{\sin(\alpha)}{\mathrm{BD}} && \text{On remplace par ce qu'on connaît}\\
\frac{\sin(\beta)}{4,5} &= \frac{\sin(82^\circ)}{\sqrt{30,49-28,8\cos(82^\circ)}} && \times 4,5\\
\sin(\beta) &= \frac{4,5\sin(82^\circ)}{\sqrt{30,49-28,8\cos(82^\circ)}} && \text{Valeur approchée}\\
\sin(\beta) &\approx 0,865947212 && \text{arcsin}\\
\beta \approx 59,991041043^\circ &\text{ ou } 120,008958957^\circ
\end{aligned}$$

(ce n'est pas le même arrondi, on trouve $\boxed{60^\circ}$ au lieu de 61 !)

4. On nous demande l'angle $\widehat{\mathrm{C}}$ qui est dans le triangle BCD. Dans ce triangle, on connaît maintenant $\mathrm{BD} \approx 5,1$, $\mathrm{CD} = 5,7$ et on peut déduire $\widehat{\mathrm{DBC}} = \widehat{\mathrm{ABC}} - \widehat{\mathrm{ABD}} \approx 134^\circ - 61^\circ \approx 73^\circ$. On peut donc résoudre ce triangle. Vu ce qu'on connaît, on va utiliser la loi des sinus :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\widehat{\mathrm{DBC}})}{\mathrm{DC}} &= \frac{\sin(\widehat{\mathrm{C}})}{\mathrm{BD}} && \text{On remplace par ce qu'on connaît}\\
\frac{\sin(73^\circ)}{5,7} &\approx \frac{\sin(\widehat{\mathrm{C}})}{5,1} && \times 5,1\\
\frac{5,1\sin(73^\circ)}{5,7} &\approx \sin(\widehat{\mathrm{C}}) && \text{Valeur approchée}\\
0,855641097 &\approx \sin(\widehat{\mathrm{C}}) && \text{arcsin}\\
\widehat{\mathrm{C}} \approx 58,830632791^\circ &\text{ ou } 121,169367209^\circ
\end{aligned}$$

Comme $\widehat{\mathrm{DBC}} \approx 73^\circ$, et que la somme des angles fait 180°, la seule valeur possible est donc $\boxed{\widehat{\mathrm{C}} \approx 59^\circ}$.

• Pour obtenir la valeur la "plus exacte possible" on va utiliser cette fois des valeurs approchées, mais avec le plus de décimales possibles :

$\widehat{\mathrm{DBC}} = \widehat{\mathrm{ABC}} - \widehat{\mathrm{ABD}} \approx 134^\circ - 59,991041043^\circ \approx 74,008958957^\circ$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\widehat{\mathrm{DBC}})}{\mathrm{DC}} &= \frac{\sin(\widehat{\mathrm{C}})}{\mathrm{BD}} && \text{On remplace par ce qu'on connaît}\\
\frac{\sin(74,008958957^\circ)}{5,7} &\approx \frac{\sin(\widehat{\mathrm{C}})}{5,146048454} && \times 5,146048454\\
\frac{5,146048454\sin(74,008958957^\circ)}{5,7} &\approx \sin(\widehat{C}) && \text{Valeur approchée}\\
0,867880877 &\approx \sin(\widehat{\mathrm{C}}) && \text{arcsin}\\
\widehat{\mathrm{C}} \approx 60,213309755^\circ &\text{ ou } 119,786690245^\circ
\end{aligned}$$

Là encore, le résultat final ne donne pas la même chose en arrondissant au degré ($\boxed{60^\circ}$ au lieu de 59).

5. Toujours avec les notations de la figure de droite, $\mathcal{A}(\mathrm{ABD}) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\times 4,5\times 3,2\times\sin(82^\circ) \approx \boxed{7,13 \text{ u.a.}}$

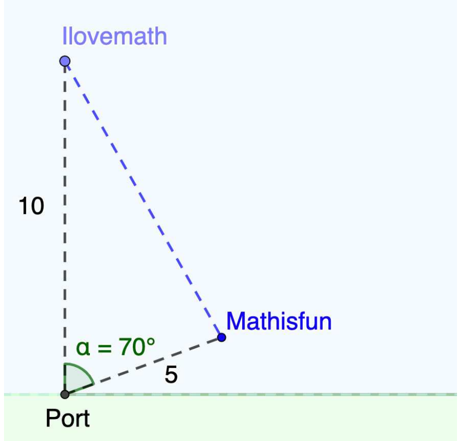
Cette fois le calcul est bien le meilleur possible, puisqu'on a utilisé les valeurs exactes données par l'énoncé.

Exercice 8 — Difficulé rouge (Calculatrice : ✓) **1 point**

	✓			1	Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$. On détaillera les étapes du calcul.

Voir correction de l'exercice 4.

Exercice 9 — Difficulé rouge (Calculatrice : ✓) **2.5 points**

					En raison des excellents résultats obtenus par tous les élèves de S5 au test B de décembre, l'école décide d'organiser un voyage de vacances en Nouvelle-Zélande. Les étudiants sont logés dans un hôtel 5 étoiles sur la côte. Un jour, un groupe d'étudiants décide de louer un catamaran et de visiter une belle île appelée "Ilovemath" située à 10 km au nord du port. Un autre groupe a loué des vélos aquatiques et a visité une autre île appelée "Mathifun" située à 5 km du port mais à un angle de 70° par rapport au nord, comme le montre le croquis ci-contre :  *Dans la suite, on donnera des expressions exactes en fonction des données du problème, puis on donnera des valeurs approchées pour les angles au degré près, et pour les volumes au million de litres près.*
	✓			1.5	1. Dans le triangle formé par le port et les deux îles, calculez l'angle situé à l'île "Ilovemath".
	✓			1	2. On considère le volume d'eau délimité par le triangle formé par le port et les deux îles, entre la surface et 1 m de profondeur. Quel est ce volume ?

Dans la suite, je vais renommer le triangle IMP pour plus de simplicité : le point I représente l'île "Ilovemath", le point M représente l'île "Mathisfun" et le point P représente le port.

1. On nous demande l'angle $\widehat{\mathrm{I}}$. Pour l'instant on ne peut utiliser ni la loi des sinus (on ne connaît que l'angle $\widehat{\mathrm{P}}$ mais pas la longueur de IM) ni le théorème d'al-Kashi (on ne connaît pas la longueur IM).

   Pour appliquer l'une ou l'autre des égalités, il nous faut donc calculer IM en premier. Pour calculer cette distance, on n'a pas le choix, il faut qu'on utilise le théorème d'al-Kashi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{IM}^2 &= \mathrm{IP}^2 + \mathrm{PM}^2 - 2\mathrm{IP}\cdot\mathrm{PM}\cdot\cos\left(\widehat{\mathrm{P}}\right) && \text{On remplace par ce qu'on connaît}\\
\mathrm{IM}^2 &= 10^2 + 5^2 - 2\times 10\times 5\cos(70^\circ) && \text{On calcule}\\
\mathrm{IM}^2 &= 125 - 100\cos(70^\circ) && \text{On résout (une longueur est positive)}\\
\mathrm{IM} &= \boxed{\sqrt{125 - 100\cos(70^\circ)}}
\end{aligned}$$

   Maintenant on peut utiliser la loi des sinus ou le théorème d'al-Kashi.

   - Avec la loi des sinus :

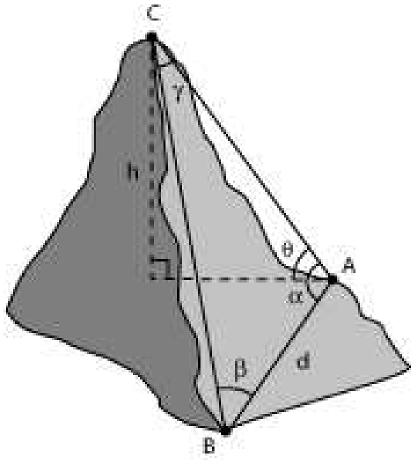
$$\begin{aligned}
\frac{\sin\left(\widehat{\mathrm{I}}\right)}{\mathrm{PM}} &= \frac{\sin\left(\widehat{\mathrm{P}}\right)}{\mathrm{IM}} && \text{On remplace}\\
\frac{\sin\left(\widehat{\mathrm{I}}\right)}{5} &= \frac{\sin(70^\circ)}{\sqrt{125-100\cos(70^\circ)}} && \times 5\\
\sin\left(\widehat{\mathrm{I}}\right) &= \frac{5\sin(70^\circ)}{\sqrt{125-100\cos(70^\circ)}} && \text{arcsin}\\
\widehat{\mathrm{I}} &= \boxed{\arcsin\left(\frac{5\sin(70^\circ)}{\sqrt{125-100\cos(70^\circ)}}\right)} \text{ ou } 180 - \arcsin\left(\frac{5\sin(70^\circ)}{\sqrt{125-100\cos(70^\circ)}}\right)
\end{aligned}$$

   On trouve alors $\boxed{\widehat{\mathrm{I}} \approx 30^\circ}$ (on ne conserve pas l'autre valeur qui donnerait une somme des angles plus grande que 180°).

2. Pour calculer le volume demandé, on a donc un prisme à base triangulaire, où l'aire de la base est l'aire du triangle IPM et la hauteur vaut 1 m. Pour calculer l'aire du triangle, on va utiliser les valeurs de l'énoncé :
   $\mathcal{A}(\mathrm{IPM}) = \frac{1}{2}\mathrm{IP}\times\mathrm{PM}\times\sin\left(\widehat{\mathrm{P}}\right) = \frac{1}{2}\times 10\text{ km}\times 5\text{ km}\times\sin(70^\circ) = 25\sin(70^\circ)\text{ km}^2$.
   Donc le volume cherché est de :
   $25\sin(70^\circ)\times 10^6\text{ m}^2\times 1\text{ m} = 25\cdot 10^6\sin(70^\circ)\text{ m}^3 = \boxed{25\cdot 10^9\sin(70^\circ)\text{ L}} \approx 23\,492\,315\,519\text{ L} \approx \boxed{23\,492\text{ millions de litres}}$.

Exercice 10 — Difficulé rouge (Calculatrice : ✓) **3 points**

					Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on choisit deux points A et B au bas de la montagne d'où l'on voit le sommet. A et B ne sont pas forcément à la même altitude, mais ils sont séparés d'une distance d. On mesure les angles $\alpha = \widehat{\mathrm{BAC}}$, $\beta = \widehat{\mathrm{ABC}}$ et l'angle d'élévation θ sous lequel on voit C depuis A.
	✓	✓	✓	2.5	1. Donnez une expression de la hauteur h (différence entre l'altitude de C et celle de A) en fonction de α, β, d et θ. On pourra faire la supposition que $\widehat{\mathrm{ACB}}$ est un angle aigu.
	✓			0.5	2. On note $\mathrm{h_A}$ l'altitude de A. Calculez l'altitude de C à 1 m près si on a les valeurs suivantes : $d = 450$ m, $\mathrm{h_A} = 920$ m, $\alpha = 35,4°$, $\beta = 105,8°$, $\theta = 23,5°$.



1. Si on nomme D le 4e point sur la figure, alors on cherche la longueur CD. Or dans le triangle ACD (qui est le seul qui contienne CD), pour l'instant on ne connaît que les angles (on connaît θ et l'angle droit en D, donc on connaît aussi le 3e angle), ce n'est pas suffisant pour trouver les longueurs. Dans l'autre triangle, par contre, on connaît 3 données indépendantes, donc on va pouvoir trouver la longueur AC, qui nous servira ensuite pour trouver $h = \mathrm{CD}$.

   Dans le triangle ABC, on connaît $d = \mathrm{AB}$ ainsi que les 3 angles, on va donc utiliser la loi des sinus :
   $$\begin{aligned} \frac{\sin(\beta)}{\mathrm{AC}} &= \frac{\sin(180° - \alpha - \beta)}{d} \\ \mathrm{AC} &= \frac{d\sin(\beta)}{\sin(180° - \alpha - \beta)} \end{aligned} \quad \text{Égalité des produits en croix}$$

   Maintenant, dans le triangle ACD rectangle en D, le rapport trigonométrique du sinus nous donne $\sin(\theta) = \dfrac{h}{\mathrm{AC}}$ donc $h = \mathrm{AC}\sin(\theta) = \boxed{\dfrac{d\sin(\beta)\sin(\theta)}{\sin(180° - \alpha - \beta)}}$.

   Remarque : on n'a pas du tout utilisé l'angle $\gamma = \widehat{\mathrm{ACB}}$.

2. Pour cette question, il suffit simplement de calculer l'altitude de C comme $h + \mathrm{h_A}$.

   On peut commencer par calculer $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 35,4° - 105,8° = 38,8°$, et on a donc :
   $\mathrm{h_C} = \dfrac{d\sin(\beta)\sin(\theta)}{\sin(\gamma)} + \mathrm{h_A} = \dfrac{450\sin(105,8°)\sin(23,5°)}{\sin(38,8°)} + 920 \approx \boxed{1\ 196}$.

Exercice 11 **0.5 point**

✓				0.5	Donner la formule la plus simple possible permettant de calculer $\sin(2a)$ en fonction des cosinus et sinus de a. BONUS — Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$. On détaillera les étapes du calcul.

On va utiliser la formule $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ avec $a = b$, cela donne :
$\sin(2a) = \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a) = \boxed{2\sin(a)\cos(a)}$.

BONUS — En utilisant la formule précédente avec $a = \dfrac{\pi}{8}$, on obtient :
$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} &= 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad \text{Valeur remarquable} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} &= \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad \div 2 \end{aligned}$$
Cela ne nous aide pas tout de suite… à moins de se souvenir de l'identité de Pythagore : $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 1$.

Or, dans le premier quart de cercle, où se trouve $\dfrac{\pi}{8}$, le sinus est positif, donc on trouve $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)}$.

En remplaçant, il vient :

$\dfrac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{1-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)}\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

On élève maintenant le tout au carré, il vient :

$\dfrac{2}{16} = \left(1-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

On peut maintenant poser $X = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, et il vient :

$\dfrac{1}{8} = (1-X)X$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{8} = X - X^2$ ou bien $X^2 - X + \dfrac{1}{8} = 0$. Dans ce trinôme, on a $a = 1$, $b = -1$ et $c = \dfrac{1}{8}$ ce qui donne $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times\dfrac{1}{8} = 1 - 0,5 = 0,5$. Ainsi $X = \dfrac{1\pm\sqrt{0,5}}{2}$.

On se retrouve donc avec $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ qui vaut soit $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{0,5}}{2}}$ soit $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{0,5}}{2}}$... (car dans ce quart de cercle, le cosinus est positif) lequel choisir ? Un calcul approché nous montre que $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{0,5}}{2}} \approx 0,92$ et $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{0,5}}{2}} \approx 0,38$.

Vu où se trouve l'angle $\dfrac{\pi}{8}$, il s'agit donc de $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{0,5}}{2}}}$.

Une autre méthode consistait à utiliser plutôt la formule de $\cos(2a)$.

Puisque $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, alors si $a = b$ il vient :
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos^2(a) - (1-\cos^2(a)) = 2\cos^2(a) - 1$, donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$$

Valeur remarquable

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$$

$+1$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Même dénominateur

$$\frac{\sqrt{2}+2}{2} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$\div 2$

$$\frac{\sqrt{2}+2}{4} = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Racine carrée (dans ce quart de cercle, le cosinus est positif)

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Simplification

$$\boxed{\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

Cette méthode était bien plus directe.