

Vers une axiomatique des mathématiques

Les images de ce document sont extraites de la bande dessinée *Logicomix* d'Apostolos Doxiadis, Christos Papadimitriou, Alecos Papadatos et Annie Di Donna (2010 pour l'édition française).

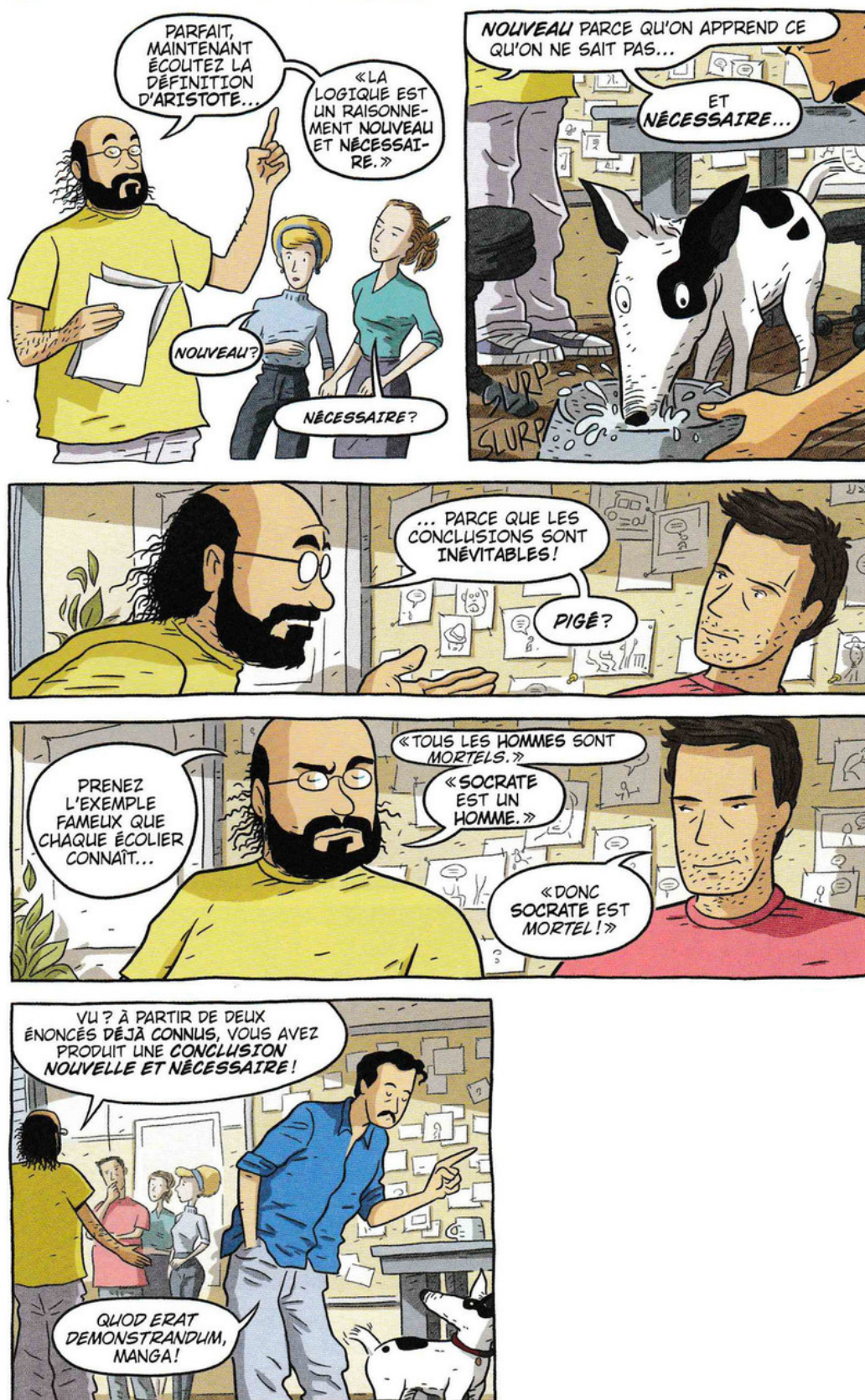
1 Premier extrait (page 77)

Le protagoniste principal de l'histoire est Bertrand Russell. Dans ce premier extrait, Russell, encore enfant, découvre pour la première fois la notion d'axiome.



2 Second extrait (pages 99–100)

Dans ce second extrait, on aperçoit les quatre auteurs de la B.D., qui discutent de ce qu'est un raisonnement logique.



4 Quatrième extrait (pages 149–150)

Dans ce quatrième extrait, Russell, encore plus âgé, nous reparle du « postulat des parallèles » qu'on a déjà rencontré dans le premier extrait.

Mais laissez-moi vous donner une idée du climat intellectuel qui régnait en 1900...

Je marque le point « A » au tableau, et je trace une ligne droite qui ne passe pas par lui...

Maintenant, je vous pose une question...

... Vous, Monsieur.

... Disons celle-ci.

Combien pouvons-nous tracer de lignes droites passant par « A » parallèles à cette droite ?

Une, évidemment !

Euclide aurait répondu pareil, comme tous les mathématiciens depuis plus de 2000 ans !

En effet.

Mais voici que ce mot « évidemment » est devenu très suspect !

L'avènement des nouvelles géométries non-euclidiennes a subverti la notion d'axiomes comme « vérités évidentes ». En fait, il avait supplanté la notion même d'« évidence » !

QUI NE VOUDRAIT LEVER LE VOILE ET VOIR LE FUTUR, AVEC LES NOUVEAUX FAITS ET MÉTHODES QU'IL RÉVÉLERA ?

Cet esprit ne trouva nulle part une meilleure expression que dans la conférence d'Hilbert, « Les problèmes des Mathématiques ».

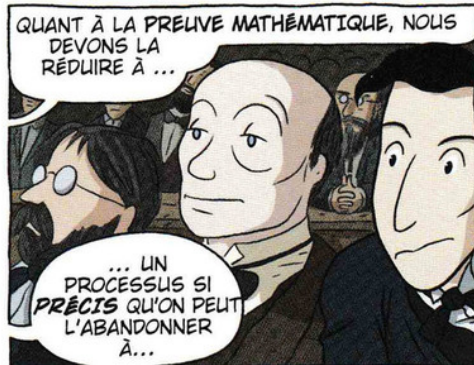
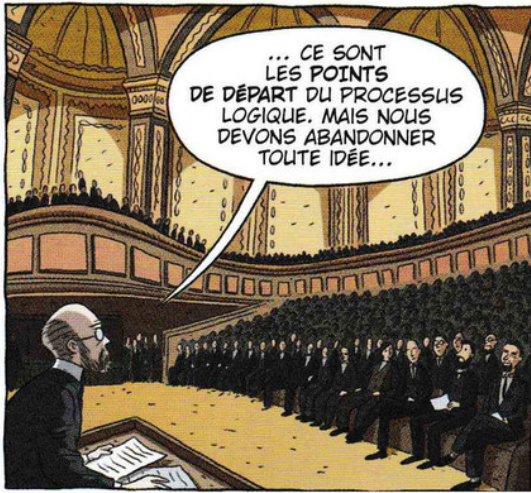
Son but déclaré était de faire un survol de l'avenir, sous la forme de vingt-trois grands problèmes irrésolus.

Mais son discours était surtout un plaidoyer pour une nouvelle mentalité, qui faisait litière d'une foule de préjugés.

L'INTUITION N'AURA PLUS DE PLACE DANS NOS PREUVES !

LES NOUVELLES MATHÉMATIQUES N'ADMETTRONT RIEN QUI SOIT « INTUITIVEMENT ÉVIDENT » ! POUR NOUS, PAS DE VÉRITÉ HORS DU CREUSET DE LA PREUVE RIGoureuse !

QUANT AUX AXIOMES D'UNE THÉORIE...

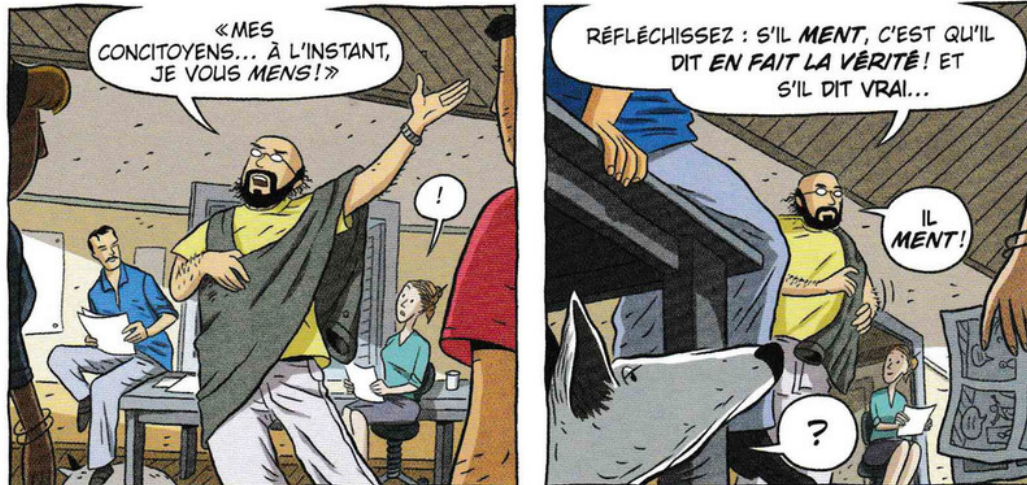
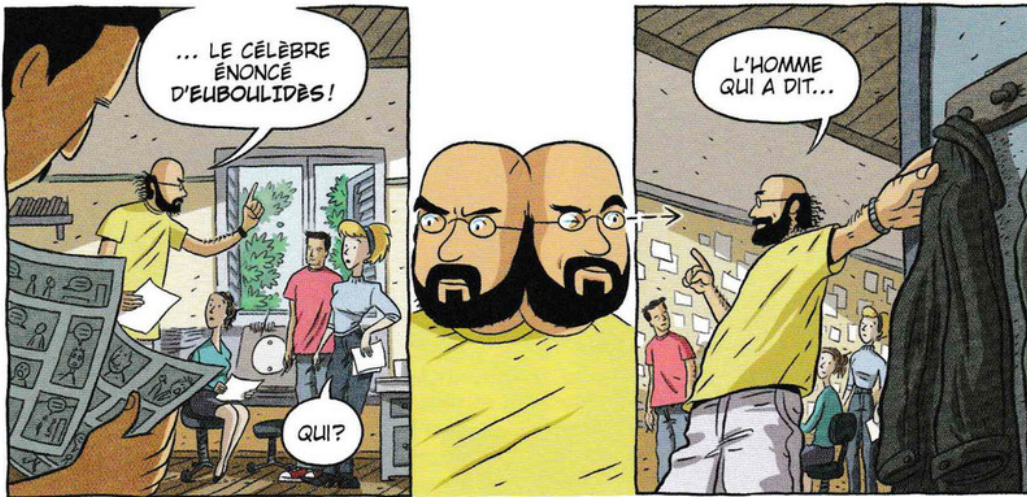


5 Cinquième extrait (pages 164–168)

Dans ce cinquième extrait, Russell nous expose le paradoxe qu'il a découvert et qui porte désormais son nom. Trois versions de ce paradoxe sont présentées : le paradoxe du barbier, le paradoxe du menteur, et pour finir, le paradoxe de Russell dans sa version mathématique, au sujet des ensembles.







La publication de mon paradoxe m'a rendu célèbre du jour au lendemain dans les cercles mathématiques internationaux.

D'aucuns l'ont accueilli avec joie...

... Comme Poincaré, qui vit dans le paradoxe de solides arguments contre les efforts pour asseoir les mathématiques sur des fondements purement logiques.

Son credo rabâché, la « Logique est stérile » trouvait une parfaite justification...

6 Sixième extrait (page 171)

Dans ce sixième extrait, nous revoyons Frege, qui, alors qu'un de ses livres était sur le point d'être imprimé, prend connaissance du paradoxe de Russell, qui remet en cause les fondements de la théorie des ensembles sur lequel est basé son livre et donc, qui remet en cause son livre lui-même.



(on remarquera simplement qu'en français, l'abréviation correct de Monsieur est « M. » et non « Mr. » qui est l'abréviation anglaise de Mister — qui plus est, l'abréviation états-unienne, en anglais de Shakespeare, l'abréviation est « Mr » sans le point)

7 Septième extrait (page 189)

Dans ce septième extrait, Russell nous explique le chemin parcouru qui a mené à une nouvelle conception des ensembles, qui permet maintenant de « soutenir les mathématiques ».

Chers amis... je sais bien que, malgré tout ce que Socrate a pu croire...

... Les profanes sont souvent à des années-lumière des préoccupations du philosophe.

Je veux donc savoir :

Pouvez-vous vraiment comprendre l'état dans lequel j'étais alors ? Mon désespoir a-t-il le moindre sens pour vous ?... Madame, qu'en dites-vous ?

Je dois avouer, ce n'est pas très clair, Professeur Russell !

Parfait... Retraçons les étapes de mon voyage : « 1 » est la nécessité de départ...

1. LES MATHÉMATIQUES DOIVENT REPOSER SUR LA LOGIQUE !
2. FREGE CRÉE LA BONNE LOGIQUE (FONDÉE SUR LES ENSEMBLES)
3. JE TROUVE LE PARADOXE I.E. "QUE LA LOGIQUE EST BANDALE !"
4. WHITEHEAD ET MOI DEVONS LA RÉPARER ("PRINCIPIA").

... « 2 » a rendu la quête possible... « 3 », où j'interviens, est la grande crise...

... Et « 4 » l'effort pour la surmonter !

Donc, ce que Whitehead et moi avons fait, en échafaudant une Logique sans paradoxe qui puisse soutenir les Mathématiques, ça a été...

... De combler la brèche que j'avais repérée dans les idées de Frege !

Et nous avons réussi dans notre tâche, à tous égards sauf un : si profond que nous ayons creusé, notre système très-très solide reposait sur du sable... Ou pire...

J'ai dit que les Fondements des mathématiques étaient pareils à la bête mythique qui supporte l'univers. Or, tout ce que nous avons fait en essayant de créer un terrain solide pour la bête... n'était...

... Qu'une tour de « tortues », de haut en bas !

8 Huitième extrait (pages 285–286)

Dans ce huitième et dernier extrait, Russell ainsi que d'autres mathématiciens assistent à un exposé de Gödel qui vient clôturer cette aventure mathématique.

