

1 Introduction

Nous l'avons vu en classe, toute démonstration en mathématiques utilise des prérequis. Prérequis qui doivent, eux aussi être démontrés... une chaîne qui s'arrête aux axiomes des mathématiques. Je vous ai montré les axiomes des probabilités tels qu'ils ont été énoncés par Андрей Колмогоров (Andreï Kolmogorov), dans la langue de l'article d'origine (l'allemand), une traduction en anglais est disponible au bout du lien suivant pour ceux qui sont intéressés :

https://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/kolmogorov_foundations.pdf

L'idée de cette activité est, à travers 3 documents de natures différentes, de mieux comprendre cette notion de démonstration, en mathématiques.

1.1 Document 1

Le premier document est une vidéo de 13 minutes de Monsieur Phi, professeur de philosophie reconverti dans la création vidéo. Sa vidéo s'intitule « Le Scepticisme — Le trilemme d'Agrippa » et est le second épisode d'une suite de 6 vidéos. Il n'est pas obligatoire de regarder l'épisode précédent pour comprendre celui-ci :

<https://www.youtube.com/watch?v=Gqu6Di353ok>

1.2 Document 2

Le second document est une courte vidéo (un peu plus d'une minute) humoristique intitulée « Question à un rabbin : Vous avez 5 minutes pour me prouvez que Dieu existe! » faisant intervenir Rav Yehia Benchetrit.

Comme vous pouvez vous en doutez, il ne s'agit pas d'une réelle démonstration, mais elle fait intervenir le même genre de raisonnements.

“

En plus de ça c'est faux parce que... tu crois que tu vas te lever le matin ? Oui ? T'es croyant. Tu crois que tu vas finir tes études ? Oui ? Pourquoi tu les entames ? Peut-être tu vas mourir avant. Pourquoi tu te maries ? Peut-être tu vas divorcer dans les 8 semaines. Donc t'es croyant. Oui mais je parlais pas de ça, je parlais de croire en Dieu. Mais, le fait que tu croies pas en Dieu, ça tu y crois, oui ? Donc t'es croyant.

Nan, ça a l'air ridicule comme ça mais... une fois j'étais dans une gare TGV, j'attendais le train. Y'a un gars qui me voit il me dit :

- « — Bonjour, vous êtes rabbin ?
- Nan, chuis cow-boy.
- J'peux vous poser une question ?
- Oui. »

Non c'est peut-être le chapeau, le manteau, je sais pas, en tout cas le cheval n'était pas là. Il me dit :

- « — Pouvez-vous me prouver que Dieu existe ?
- Je sais pas, vous avez combien de temps ?
- J'ai cinq minutes.
- Vous savez que ça fait 5 000 ans que les hommes se posent la question et vous vous avez cinq minutes ?
- C'est tout ce que j'ai à vous accorder.

— Bon, ok, on y va. Vous existez, vous ?
 — Bah... oui !
 — Mais comment vous le savez ?
 — Ben, j'ai conscience d'exister.
 — Ah. Cette conscience d'exister, vous l'avez héritée de quelqu'un qui existait ?
 — Oui, mon père.
 — Lui-même savait qu'il existait ?
 — Oui.
 — De qui il a eu la conscience d'exister lui-même, de quelqu'un qui existait. Le premier homme, il a existé, il a eu la conscience d'exister. De qui il a eu la conscience d'exister ? De quelqu'un qui existe, donc Dieu existe. Vous avez même le temps de boire un café. »

Rav Yehia Benchetrit, <https://www.youtube.com/watch?v=gwydqK9GJew> ””

1.3 Document 3

Le troisième document est composé de plusieurs extraits de la bande dessinée *Logicomix* d'Apostolos Doxiadis, Christos Papadimitriou, Alecos Papadatos et Annie Di Donna (2010 pour l'édition française).

http://www.barsamian.am/2022-2023/S5P6/Logicomix_extraits.pdf

Premier extrait (page 77) : le protagoniste principal de l'histoire est Bertrand Russell. Dans ce premier extrait, Russell, encore enfant, découvre pour la première fois la notion d'axiome.

Second extrait (pages 99–100) : dans ce second extrait, on aperçoit les quatre auteurs de la B.D., qui discutent de ce qu'est un raisonnement logique.

Troisième extrait (page 120) : dans ce troisième extrait, on est de retour avec Bertrand Russell, plus âgé, qui rend visite au professeur Frege, un logicien.

Quatrième extrait (pages 149–150) : dans ce quatrième extrait, Russell, encore plus âgé, nous parle du « postulat des parallèles » qu'on a déjà rencontré dans le premier extrait.

Cinquième extrait (pages 164–168) : dans ce cinquième extrait, Russell nous expose le paradoxe qu'il a découvert et qui porte désormais son nom. Trois versions de ce paradoxe sont présentées : le paradoxe du barbier, le paradoxe du menteur, et pour finir, le paradoxe de Russell dans sa version mathématique, au sujet des ensembles.

Sixième extrait (page 171) : dans ce sixième extrait, nous revoyons Frege, qui, alors qu'un de ses livres était sur le point d'être imprimé, prend connaissance du paradoxe de Russell, qui remet en cause les fondements de la théorie des ensembles sur lequel est basé son livre et donc, qui remet en cause son livre lui-même.

(on remarquera simplement qu'en français, l'abréviation correct de Monsieur est « M. » et non « Mr. » qui est l'abréviation anglaise de Mister — qui plus est, l'abréviation états-unienne, en anglais de Shakespeare, l'abréviation est « Mr » sans le point)

Septième extrait (page 189) : dans ce septième extrait, Russell nous explique le chemin parcouru qui a mené à une nouvelle conception des ensembles, qui permet maintenant de « soutenir les mathématiques ».

Huitième extrait (pages 285–286) : dans ce huitième et dernier extrait, Russell ainsi que d'autres mathématiciens assistent à un exposé de Gödel qui vient clôturer cette aventure mathématique.

2 Questions

2.1 Document 1

1. Deux types de scepticisme sont présentés. Le scepticisme radical, représenté par Πυρρων (Pyrrhon), et un autre vu comme plutôt scientifique. Qu'en est-il en mathématiques ? Une connaissance mathématique est-elle également « plus ou moins probable » ?
2. Monsieur Phi dit de Pyrrhon qu'il est sceptique quant à son scepticisme même, et qu'en ce sens, il est meta-sceptique. Expliquez la signification de cette expression et donnez d'autres exemples d'utilisation du préfixe « meta ».
3. Monsieur Phi définit ce qu'est une connaissance, qu'il oppose à un préjugé mal examiné, même quand il est vrai. Donnez un ou plusieurs exemples (dans le domaine de votre choix) mettant en scène un préjugé faux ; idem pour un préjugé vrai. Selon vous, quel est le statut d'une conjecture en mathématiques ?
4. La troisième structure du trilemme est l'arrêt dogmatique. C'est le cas en mathématiques. En fait les connaissances en mathématiques ne sont pas des vérités absolues. Ce qu'on démontre est seulement vrai dans une théorie donnée. Ainsi, vous avez vu que la somme des angles d'un triangle faisait toujours 180° . Mais... toujours ? Vraiment ?

2.2 Document 2

Dans la vidéo, Rav Yehia Benchetrit fait une démonstration qui est un « argument valide », mais qui ne permet pas forcément de démontrer la conclusion, car il y a des hypothèses (ou prémisses) qui sont ici cachées. Quelles sont les hypothèses qui sont faites ? Est-il vrai que « Si ces hypothèses sont vraies, alors Dieu existe » ?

2.3 Document 3

1. Dans le premier extrait, le jeune Bertrand Russell découvre ce qu'on appelle aujourd'hui le « Cinquième postulat d'Euclide », qui permet de faire de la géométrie euclidienne (!). Quels sont les quatre autres postulats ?
2. Dans le second extrait, il est question d'un syllogisme que vous êtes nombreux à connaître. Le raisonnement est parfaitement valide, et de plus, les deux premiers énoncés de départ étant vrais, la conclusion est vraie. Trouvez un exemple de raisonnement valide mais avec un ou plusieurs énoncés de départ faux, ainsi qu'une conclusion fautive. Quel est le nom d'un tel type de raisonnement ?
3. Expliquer l'humour dans le troisième extrait.
4. Dans le quatrième extrait, il est question de géométries non-euclidiennes. Expliquez en quelques mots l'une de ces géométries.
5. Dans le cinquième extrait, on découvre un paradoxe très important, qui a obligé à reformuler la théorie des ensembles. Donner un exemple de réponse qu'on pourrait formuler à la question « Qui rase le barbier ? ».
6. Dans le huitième extrait, Gödel montre que « il y aura toujours des questions sans réponse ». Il y a donc des résultats « indécidables » dans (presque) toute théorie cohérente, c'est-à-dire qui ne donne pas lieu à des contradictions. Car, dans le cas où la théorie est contradictoire, *ex falso quodlibet*. Expliquez alors la notation $P \wedge \neg P$ dans le comic « Principle of Explosion » : <https://xkcd.com/704/>.

3 Diverses ressources

Si vous avez été intéressés par le sujet, je ne peux que vous recommander de regarder les 6 épisodes de Monsieur Phi sur la thématique de la démonstration. L'épisode 4 explique notamment les axiomes de la géométrie euclidienne.

1 : « Comment démontrer n'importe quoi » :

<https://www.youtube.com/watch?v=2D0YvDWZWwo>

2 : « Le Scepticisme — Le trilemme d'Agrippa » :

<https://www.youtube.com/watch?v=Gqu6Di353ok>

3 : « Le Fondationnalisme — Quelle base pour l'édifice des connaissances ? » :

<https://www.youtube.com/watch?v=J5dTXVbS3Vg>

4 : « L'axiomatique — Les Éléments d'Euclide » :

<https://www.youtube.com/watch?v=enZpq8jvFEs>

5 : « Le paradoxe de Lewis Carroll » :

<https://www.youtube.com/watch?v=j5EEH0okkaQ>

6 : « La règle des règles » :

<https://www.youtube.com/watch?v=iQ-AWuLk32c>

La première structure dans le trilemme d'Agrippa est la chaîne qui se prolonge indéfiniment. En mathématiques, on peut démontrer qu'une chaîne de nombres entiers naturels strictement décroissants ne peut pas être infinie. C'est le principe de la « descente infinie ». C'est un raisonnement qui sous-tend l'intrigue d'une nouvelle de Robert Louis Stevenson, *Le diable dans la bouteille*. Ce texte est maintenant dans le domaine public, et peut être lu (en version originale) au bout du lien suivant :

https://en.wikisource.org/wiki/Island_Nights%27_Entertainments/The_Bottle_Imp