Chapitre 5.
Dénombrement

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2022–2023

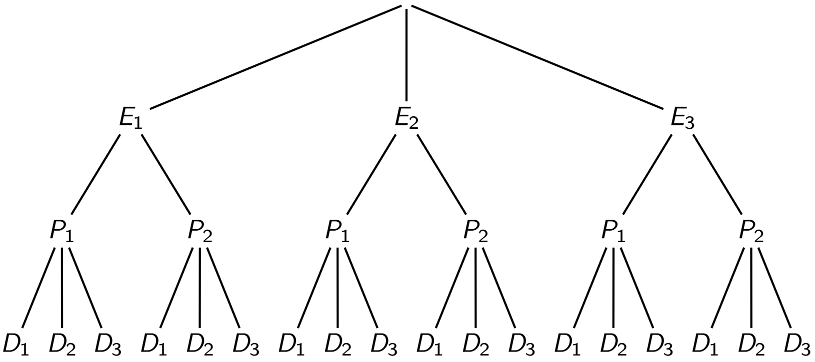
Plan du chapitre

- Principe multiplicatif
- Permutations
- Sous-ensemble, avec ou sans ordre

> *Les choses de toutes natures sont soumises à une loi universelle qu'on peut appeler la loi des grands nombres. Elle consiste en ce que, si l'on observe des nombres très considérables d'événements d'une même nature, dépendant de causes constantes et de causes qui varient irrégulièrement, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, c'est-à-dire sans que leur variation soit progressive dans aucun sens déterminé, on trouvera, entre ces nombres, des rapports à très peu près constants. Pour chaque nature de choses, ces rapports auront une valeur spéciale dont ils s'écarteront de moins en moins, à mesure que la série des événements observés augmentera davantage, et qu'ils atteindraient rigoureusement s'il était possible de prolonger cette série à l'infini.*
>
> *S.D. Poisson, "Recherches sur la probabilité des jugements" (1838), Préambule (page 7)*

I/ Principe multiplicatif

Pour dénombrer des possibilités, on utilise souvent le principe multiplicatif. Par ex. si un restaurant propose 3 entrées, 2 plats et 3 desserts, alors on peut composer $3 \times 2 \times 3 = 18$ menus différents. Cela peut se voir sur l'arbre de dénombrement suivant (les E_i sont les entrées, les P_i les plats et les D_i les desserts) :



I/ Principe multiplicatif

Pour dénombrer des possibilités où n choix peuvent prendre chacun k valeurs, on obtient donc k^n possibilités en tout : le premier choix peut prendre k valeurs, le second aussi (k^2 choix pour les deux premiers), le troisième aussi (k^3 choix pour les trois premiers), etc.

Ex. : Si on doit choisir un code PIN contenant 4 chiffres (de 0 à 9), il y a donc $10^4 = 10\ 000$ choix possibles.

III/ Sous-ensemble, avec ou sans ordre

Dans le cas général, il faut faire attention à ce que l'on dénombre : est-ce que l'ordre a de l'importance ou pas ?

Pour dénombrer des <u>groupes de k éléments parmi n éléments</u> :

- si l'ordre a de l'importance : il s'agit d'un arrangement
- si l'ordre n'a pas d'importance : il s'agit d'une combinaison

III/ Sous-ensemble, avec ou sans ordre

Lorsque l'ordre a de l'importance, on calcule des arrangements de la manière suivante.

Ex. : Dans une compétition à 8 athlètes, on veut savoir le nombre de podiums différents possibles. L'ordre a de l'importance, car il est important de savoir quel athlète a la médaille d'or, d'argent ou de bronze. Il y a donc $8 \times 7 \times 6$ podiums différents.

Dans le formulaire :

$$\boxed{A(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Le calcul $A(8,3) = \dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ donne bien $8 \times 7 \times 6$.

À la calculatrice : Menu -> Probabilités -> Arrangements donne `nPr()`, il faut donc ensuite taper `nPr(8, 3)` ce qui donne 336.

Lorsque l'ordre n'a pas d'importance, on calcule des combinaisons de la manière suivante.

Ex. : Dans une classe à 25 élèves, on veut savoir le nombre de groupes de 4 personnes possibles. On peut commencer par dénombrer les groupes de 4 personnes où l'ordre est important : il y en a $A(25, 4)$. Combien de fois a-t-on compté chaque groupe ? Pour 4 personnes, on a $A(4, 4) = 4!$ arrangements différents (une permutation des 4 éléments). Donc, chaque groupe a été compté 4! fois au lieu d'une seule. Il suffit de diviser par 4!. On a donc $\dfrac{A(25,4)}{4!}$ groupes possibles.

Dans le formulaire :

$$\boxed{C(n,k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$$

À la calculatrice : Menu -> Probabilités -> Combinaisons donne `nCr()`, il faut donc ensuite taper `nCr(25, 4)` ce qui donne 12 650.