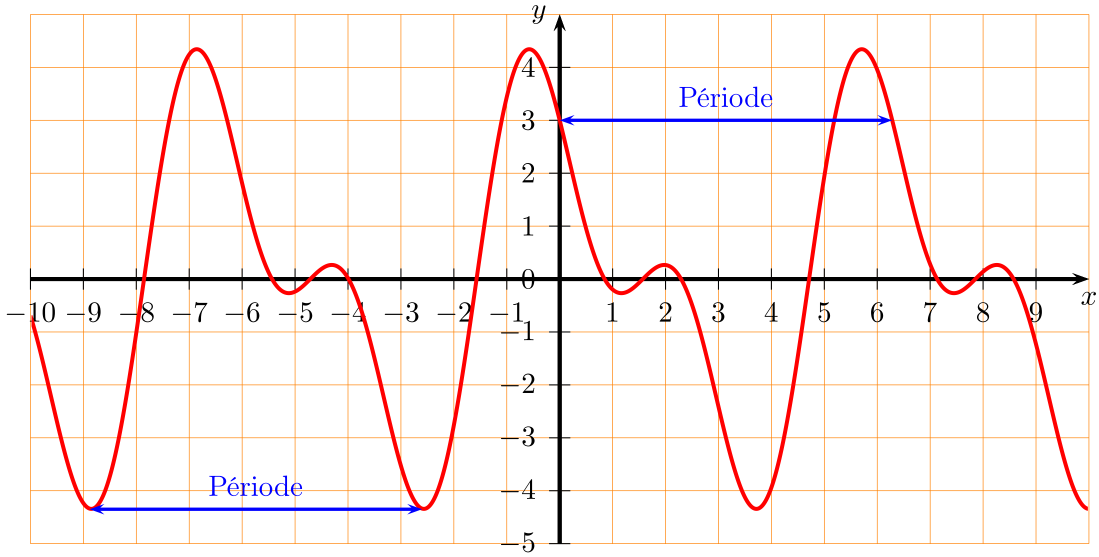
Dans ce chapitre on va travailler avec des fonctions périodiques et aborder la notion de fonction paire ou impaire (hors programme, mais facile). Pour ces deux notions, vous pouvez aller sur la page du cours `http://www.barsamian.am/2022-2023/S6P3/` et regarder dans les ressources du chapitre 6, la vidéo “Reconnaître graphiquement parité et périodicité” : `https://www.youtube.com/watch?v=RV3Bi06nQ0s`.

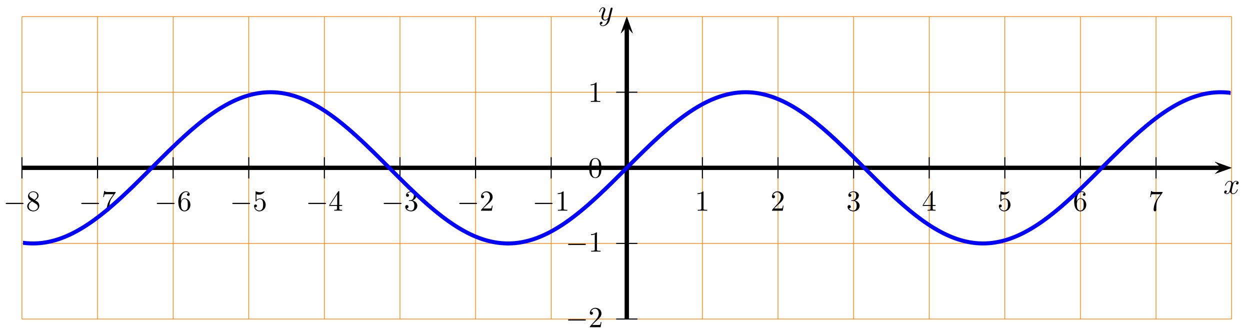
Voici un exemple de fonction périodique : $f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(2x)$ :



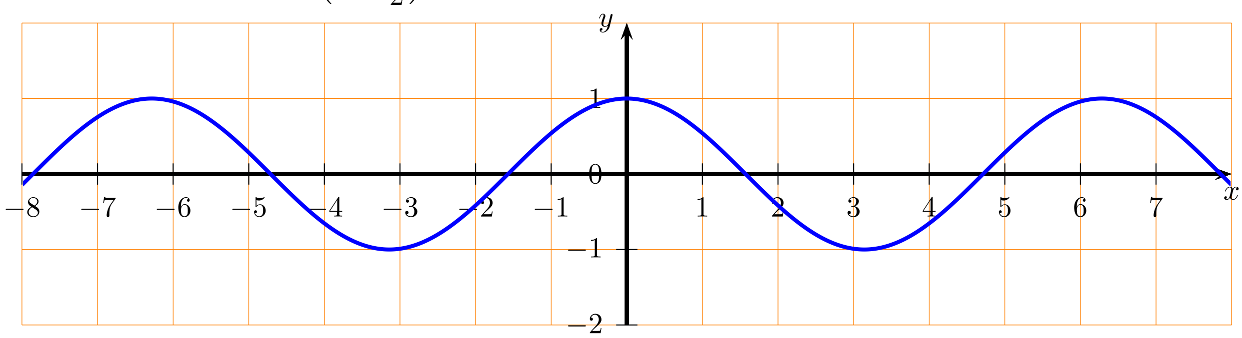

Dans ce chapitre, il faut faire très attention à toujours mettre la calculatrice en radians : s'il y a écrit “DEG” ou “D” en haut à droite de l'écran, la calculatrice est réglée en degrés : il faut changer en “RAD” ou “R” qui indique que la calculatrice est réglée en radians.

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à des fonctions sinusoïdales. Ce sont des fonctions dont le graphique ressemble au graphique de la fonction sinus (avec décalages et/ou étirements).

On rappelle que le graphique (tronqué, il se continue “à l'infini des deux côtés”) de la fonction sinus est le suivant. C'est une fonction impaire (le graphique est symétrique par rapport à l'origine ; cela veut aussi dire que $\sin(-x) = -\sin(x)$). C'est une fonction périodique de période $2\pi$.




La fonction cosinus a le graphique suivant (tronqué également. C'est une fonction paire (le graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ; cela veut aussi dire que $\cos(-x) = \cos(x)$). On remarque que par rapport au graphique précédent, il y a un décalage de $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ sur l'axe des $x$, vers la gauche. Cela veut dire que $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

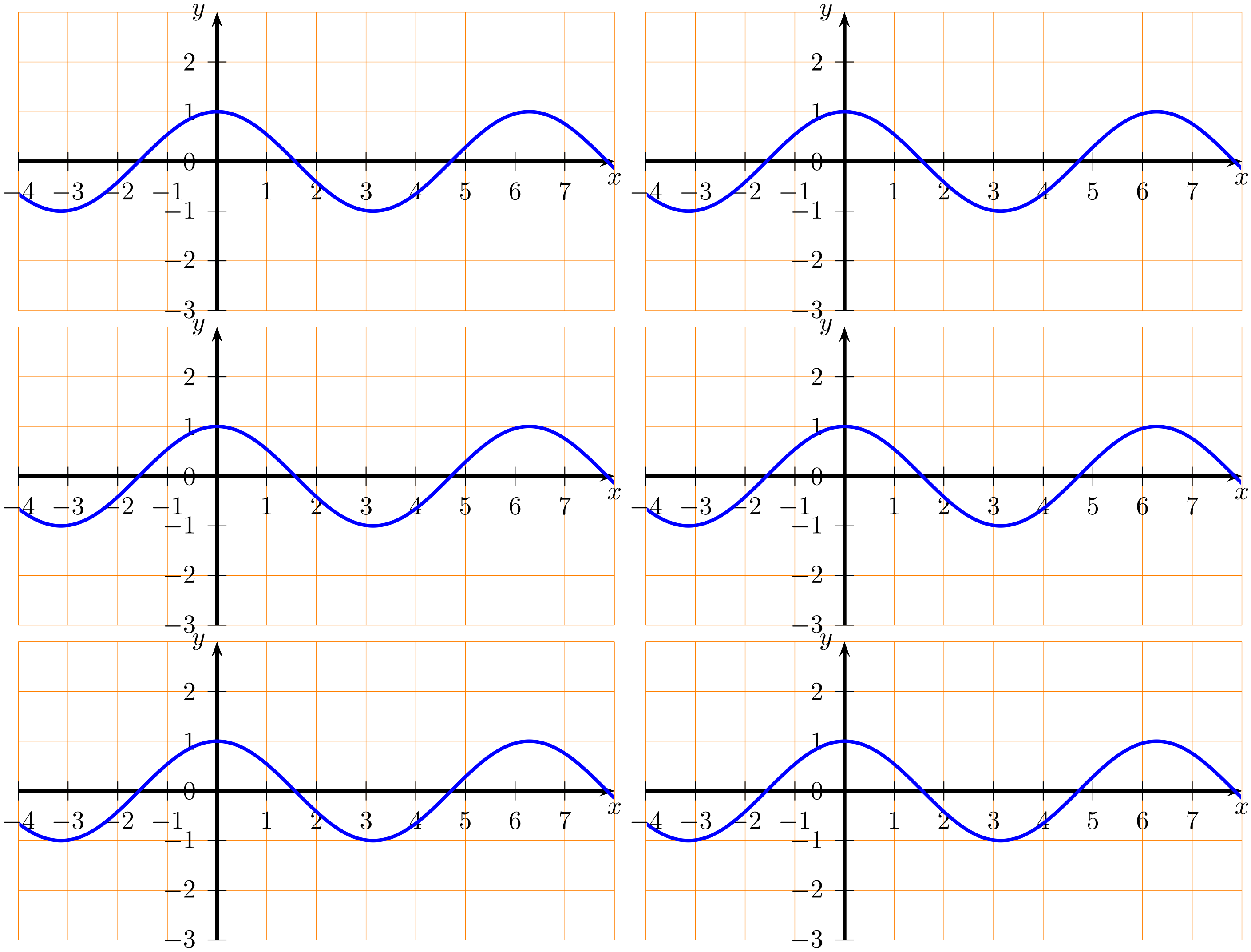



Le but de cette partie est d'étudier des fonctions de type $f(x) = a\sin(bx + c) + d$ ou bien $f(x) = a\cos(bx + c) + d$, et de comprendre les notions d'amplitude, période et déphasage pour ces fonctions.

**Exercice 1**

Regarder dans geogebra le graphique des fonctions suivantes. Comparer à chaque fois au graphique de la fonction cosinus, en traçant chacune des fonctions sur les graphiques suivants :

- $\cos(2x)$
- $\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$
- $3\cos(x)$
- $\cos(x-1)$
- $\cos(2x-1)$
- $\cos(x)+1,5$



**Exercice 2**

L'évolution de la population $P$ d'une harde de cerfs est modélisée par la fonction :

$$P(t) = 4000 + 500\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ où } t \text{ est mesuré en années.}$$

1. Dessinez le graphe de $P$ pour un an.
2. Quand dans l'année la population est-elle à son maximum ? Quelle est la population à ce moment-là ?
3. Mêmes questions que 2. pour le minimum.
4. Quelle est la période de la fonction $P$ ?

**Exercice 3**

On calcule la variation annuelle de température T (en °C) à Ottawa, au Canada, par :

$$T(t) = 15,8\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 5$$

où $t$ représente le temps en mois et $t = 0$ correspond au 1er janvier.

1. Représentez graphiquement $\mathcal{C}_T$ pour $0 \leq t \leq 12$.
2. Déterminez la température maximale de l'année et la date à laquelle cela se produit.

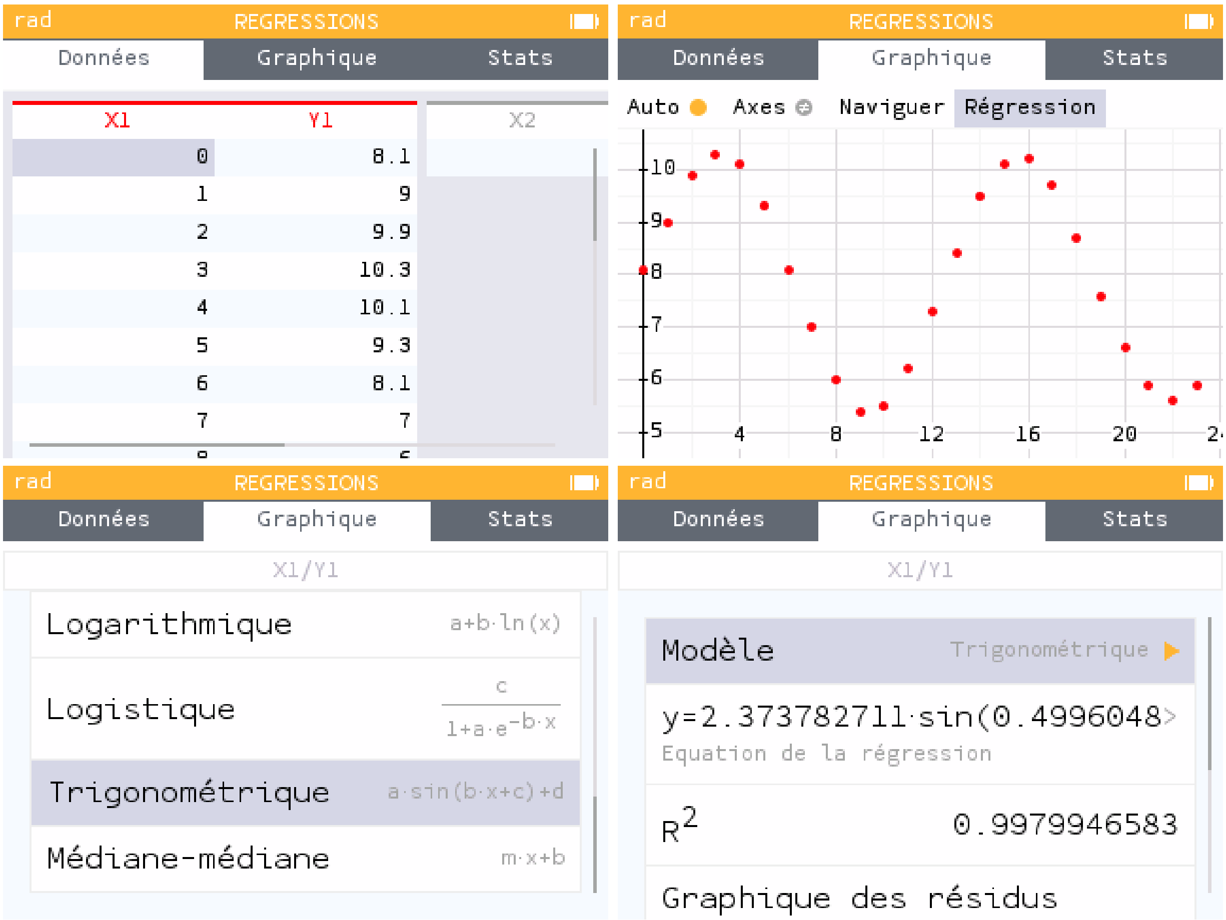
**Exercice 4**

Lorsqu'un fleuve se jette dans l'océan, la profondeur de ce fleuve varie en fonction des marées. Le tableau suivant donne la profondeur (en m) de la Tamise, à Londres, sur une durée de 24 heures.

| Heure | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Profondeur | 8,1 | 9,0 | 9,9 | 10,3 | 10,1 | 9,3 | 8,1 | 7,0 | 6,0 | 5,4 | 5,5 | 6,2 |

| Heure | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Profondeur | 7,3 | 8,4 | 9,5 | 10,1 | 10,2 | 9,7 | 8,7 | 7,6 | 6,6 | 5,9 | 5,6 | 5,9 |

1. Reportez les données sur un graphique avec le temps sur l'abscisse et la profondeur sur l'ordonnée.
2. Déterminez une fonction $P(t) = a\sin(b \cdot t + c) + d$ approchant au mieux les données du tableau. Pour cela, allez dans le menu « Régressions » de la Numworks, rentrez les heures pour X, la profondeur pour Y, puis dans le graphique, allez sur « Régression » et descendez jusque « Trigonométrique $a{\cdot}\sin(b{\cdot}x{+}c){+}d$ ». Validez, puis la courbe de modélisation s'affiche. Allez de nouveau sur « Régression » et la calculatrice vous affiche les valeurs du modèle.




3. Si un bateau a besoin d'au moins 7 m d'eau pour naviguer en toute sécurité sur la Tamise, déterminez graphiquement les intervalles de temps pendant lesquels la navigation n'est pas sûre.

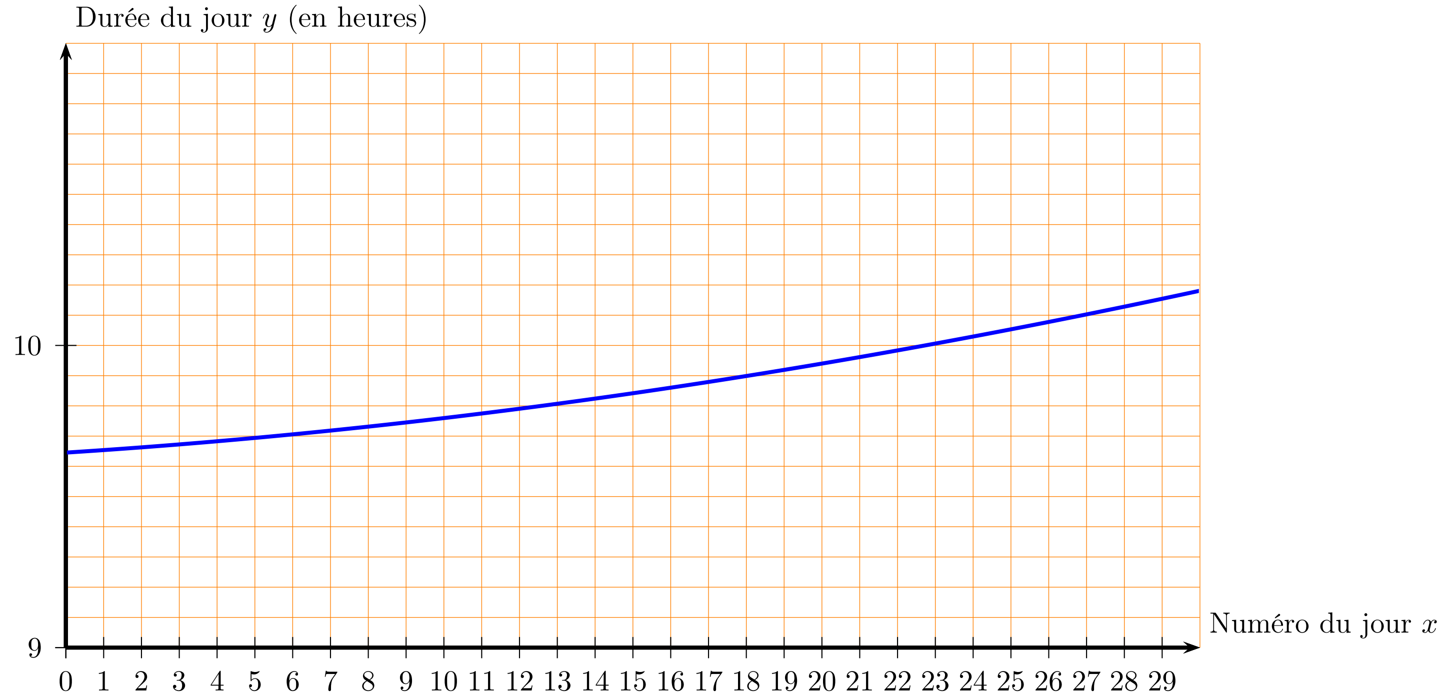
**Exercice 5**

À Madrid, la longueur du jour $D$ (exprimée en heures) est donnée en fonction de la date par la formule approchée :

$$D(t) = 12 + 2,4\sin(0,0172(t - 80))$$

où $t$ est le numéro du jour depuis le début de l'année.

La figure ci-dessous montre le graphe de $D$ durant le mois de janvier. On a en abscisse le nombre de jours écoulés depuis le début du mois en question, et en ordonnée la durée du jour en heures.




1. Pourquoi ne reconnaît-on pas une fonction sinusoïdale sur le graphique ?
2. Lire graphiquement la durée du jour le 12 janvier.
3. Quelle était la durée du jour le 23 mai ?
4. Pouvez-vous expliquer les valeurs des paramètres de la fonction $D$ (à savoir 12, $2,4$, $0,0172$ et $-80$) ?