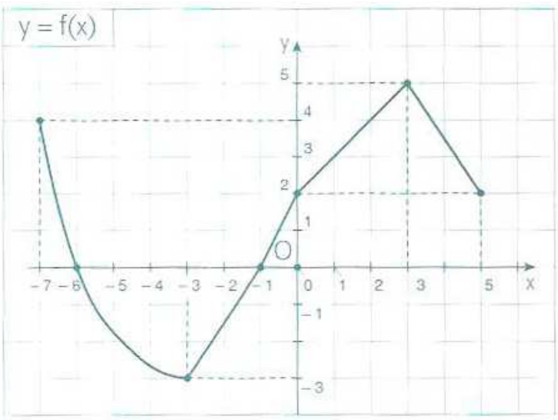
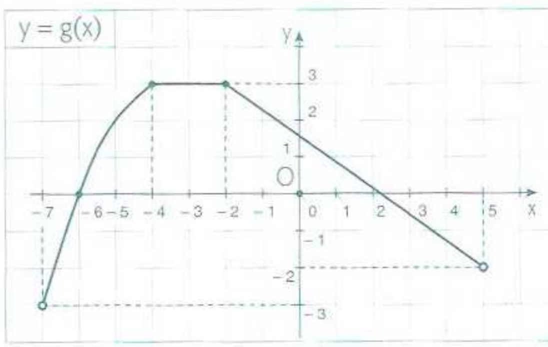
Connaissances	Méthodes	Résolution	Interprétation	Barème	
					On accordera une attention particulière, à ce devoir comme à tous les autres, à l'orthographe, la présentation et la rédaction des réponses (ce qui inclut l'obligation de justifier). Sur le total, <u>1 point</u> est dévolu à cela. Chaque question est annotée à gauche avec le nombre de points et les compétences évaluées.

Exercice 1 **5 points**

					Voici les graphiques de deux fonctions. Pour chacune d'elles, réponsez aux questions suivantes :
✓	✓			1	1. Quel est le domaine de la fonction ?
✓	✓			1	2. Quel est l'ensemble image de la fonction ?
✓	✓			1	3. Quelles sont les racines de la fonction ?
✓	✓			1	4. Sur quel ensemble la fonction est-elle positive ?
✓	✓			1	5. Quels sont les extremums (minimum, maximum) de la fonction ? En quelles valeurs sont-ils atteints ?





Fonction f.

1. Le domaine est $\mathcal{D}_f = [-7; 5]$ (on peut noter aussi $\mathcal{D}om(f)$).
2. L'ensemble image est $\mathcal{I}m(f) = [-3; 5]$.
3. Les racines de f sont $\{-6; -1\}$.
4. La fonction f est positive sur $[-7; -6] \cup [-1; 5]$.
5. Le minimum de f est -3. Il est atteint pour $x = -3$ (ce qui veut dire que $f(-3) = -3$).
   Le maximum de f est 5. Il est atteint pour $x = 3$ (ce qui veut dire que $f(3) = 5$).

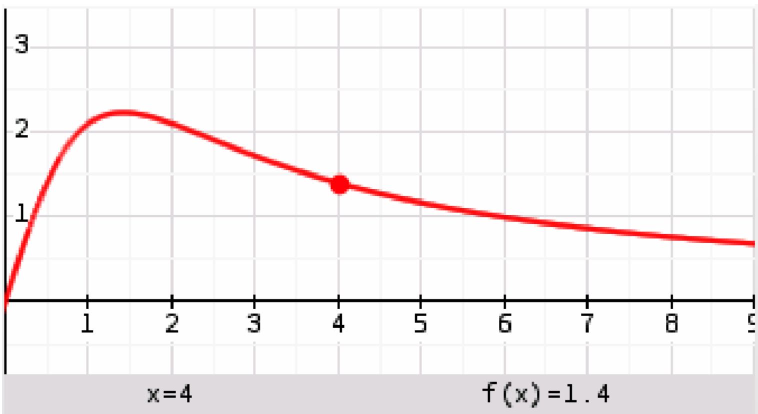
Fonction g.

1. Le domaine est $\mathcal{D}_g =]-7; 5[$ (ici aux extrémités, en $x = -7$ et en $x = 5$, on a un point vide, pas plein, et la convention est que dans ce cas le point n'est pas sur le graphique ; donc -7 et 5 ne sont pas dans l'ensemble de définition de g).
2. L'ensemble image est $\mathcal{I}m(g) =]-3; 3]$ (c'est la même subtilité : la valeur -3 n'est pas atteinte car le point tout en bas n'est pas sur le graphique, mais la valeur 3 est bien atteinte).
3. Les racines de g sont $\{-6; 2,2\}$.
4. La fonction g est positive sur $[-6; 2,2]$.
5. La fonction g n'a du coup pas de minimum (puisque la valeur -3 n'est pas atteinte, le point n'est pas sur le graphique). Bien sûr si on pensait que le point était sur le graphique, alors on aurait répondu que -3 est le minimum et qu'il est atteint pour $x = -7$ (ce qui veut dire que $g(-7) = -3$). Le vocabulaire dans ce cas est que -3 est une *borne inférieure* de la fonction, mais cette notion n'est pas au programme. En pratique, on vous compterait probablement bon si vous dites que le minimum est -3.
   Le maximum de g est 3. Il est atteint pour n'importe quelle valeur de x dans $[-4; -2]$ (ce qui veut dire que $g(-4) = 3$, $g(-3,9) = 3$, $g(-3,8) = 3$, $\ldots$).

Exercice 2 **3 points**

					Des expériences pour tester un médicament, suivies d'une modélisation mathématique, ont permis d'établir qu'après avoir injecté une dose de ce produit, la quantité de substance (en millilitres par litre de sang) à l'instant t (en heures), est égale à : $$f(t)=\frac{6,3t}{t^2+2} \qquad \text{pour } t>0$$
	✓		✓	1	1. Quelle est la concentration du médicament 45 minutes après injection du produit ? 2h après injection du produit ?
	✓	✓		2	2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'instant t (à 0,01 près) où la concentration du médicament est maximale en détaillant votre démarche.

1. 45 minutes, cela fait $0,75$h, donc on calcule $f(0,75)=\dfrac{6,3\times 0,75}{0,75^2+2}\approx 1,8$. La concentration du médicament 45 minutes après injection du produit est de $\boxed{\text{environ } 1,8 \text{ ml par litre de sang}}$ (ne pas oublier l'unité !). De même, on remplace t par 2 et la concentration du médicament 2h après injection du produit est de $\boxed{2,1 \text{ ml par litre de sang}}$.
2. On trace la fonction à la calculatrice. On obtient la courbe suivante. On voit que le maximum est atteint environ à $t=1,4$. On va dans la table de valeurs, et on demande les valeurs entre $1,2$ et $1,6$ avec un pas de $0,01$.



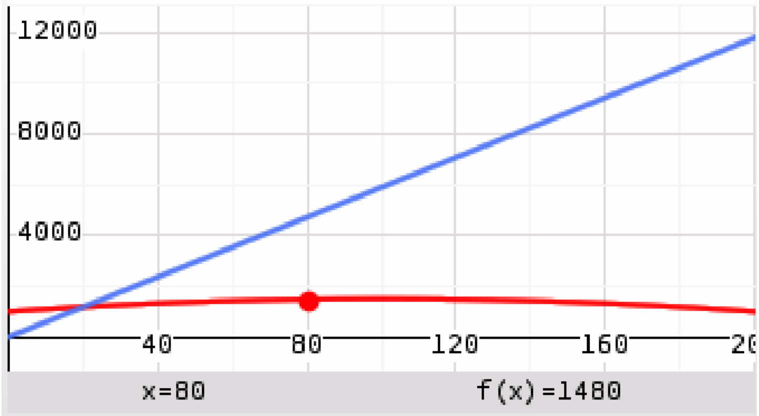
x	f(x)
1.38	2.226719
1.39	2.227054
1.4	2.227273
1.41	2.227376
1.42	2.227368
1.43	2.227249
1.44	2.227023
1.45	2.226691

La calculatrice nous donne $f(1,4)\approx 2,227273$, $f(1,41)\approx 2,227376$ et $f(1,42)\approx 2,227368$ donc le maximum est à peu près en $\boxed{t\approx 1,41}$.

Exercice 3 **4 points**

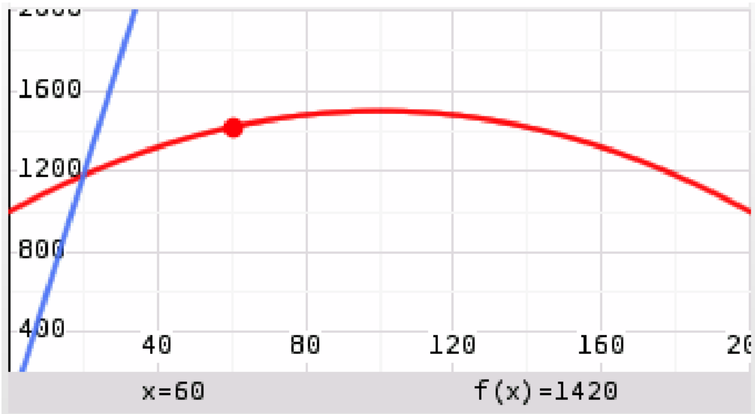
					Dans l'entreprise MAT, le coût de fabrication d'un produit, en euros, est donné par la fonction C définie pour $0<q<200$ par : $$C(q)=-0,05q^2+10q+1\ 000$$ où q désigne la quantité de produits en kilogrammes. Les recettes sont données, en euros, par la fonction R également définie pour $0<q<200$ par : $$R(q)=59q$$
	✓			2	1. Tracer les courbes des fonctions C et R dans un repère adapté.
	✓	✓		1	2. Pour quelle quantité de produit les coûts sont-ils inférieurs à 1 420€ ?
	✓		✓	1	3. Pour quelle quantité de produit a-t-on $R(q)>C(q)$? Interpréter ce résultat pour l'entreprise.

1. Ici, il s'agit de tracer la courbe pour q entre 0 et 200. Si on regarde à la calculatrice, on obtient l'image suivante :



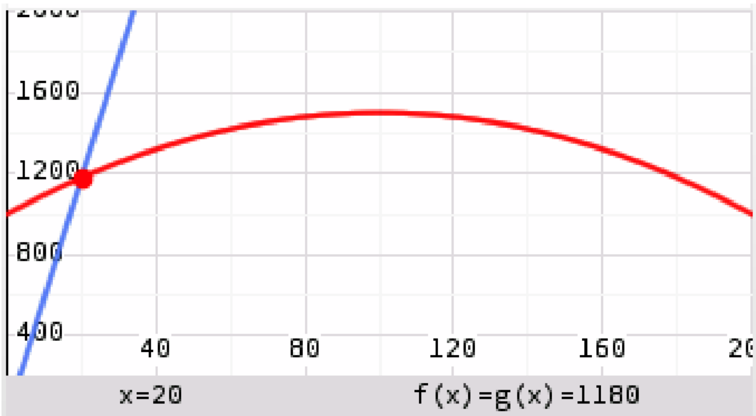
On peut donc prendre 1 cm pour 20 kg sur l'axe des abscisses, et 1 cm pour 12 000€ sur l'axe des ordonnées.

2. Les coûts sont représentés par la fonction C. On peut peut donc demander à la calculatrice les antécédents de 1 420. Sur Numworks, depuis le graphique, appuyer sur Calcul, sur l'expression $-0,05x^2 + 10x + 1\ 000$, sur Calculer, sur Antécédent, et remplir 1 420. La calculatrice donne deux valeurs possibles : 60 et 140. On peut zoomer un peu sur la courbe, par exemple en restreignant les valeurs de y entre 0 et 2 000 comme sur le dessin suivant :



La courbe est en-dessous de 1 420 pour $\boxed{x \in]0; 60[\cup]140; 200[}$ (les deux valeurs trouvées précédemment).

3. Toujours depuis l'écran graphique, on va trouver l'intersection des deux courbes (ce qui nous dira quand $C(x) = R(x)$. Sur Numworks, depuis le graphique, appuyer sur Calcul, sur l'expression $-0,05x^2 + 10x + 1\ 000$, sur Calculer, sur Intersection, et comme ici il n'y a que 2 fonctions l'intersection c'est forcément avec l'autre courbe. La calculatrice donne comme unique valeur : $x = 20$.



Donc, $R(q) > C(q)$ pour $\boxed{q > 20}$. Cela veut dire que les recettes sont plus grandes que les coûts (donc, que l'entreprise $\boxed{\text{engrange un bénéfice}}$) à partir de 20 kg de produit.

Exercice 4 — BONUS

					On décide de modéliser la croissance de la population d'une ville par la fonction f définie par : $$f(t) = 100\ 000 \cdot 1,05^t$$ où t est le temps écoulé depuis 2010 (en années) et $f(t)$ le nombre de personnes dans la ville.
		✓	✓		Ce modèle est-il réaliste sur le long terme ? Expliquer.

Une fonction exponentielle va grandir sans s'arrêter. Assurément, la population ne peut pas grandir sans borne, donc à un moment, $\boxed{\text{ce modèle ne sera plus valide}}$.

PS : L'expression $f(t) = 100\ 000 \cdot 1,05^t$ correspond à une population initiale de 100 000 personnes avec une augmentation de 5% par an. Augmentation qui ne peut donc pas toujours durer de la sorte.