Connaissances	Méthodes	Résolution	Interprétation	Barème	
					On accordera une attention particulière, à ce devoir comme à tous les autres, à l'orthographe, la présentation et la rédaction des réponses (ce qui inclut l'obligation de justifier). Sur le total, 1 point est dévolu à cela. Chaque question est annotée à gauche avec le nombre de points et les compétences évaluées.

Exercice 1 — 2 points

Dans une urne se trouvent plusieurs boules indiscernables au toucher : trois boules numérotées 1, quatre numérotées 2, deux numérotées 3, une numérotée 4 et deux numérotées 5. On tire au hasard une boule de l'urne et on note X la variable aléatoire qui correspond au numéro de la boule obtenue.

C	M	R	I	Barème	
✓	✓			1	1. Complétez le tableau suivant qui représente la loi de probabilité de X.
	✓			1	2. Calculez l'espérance de X.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$	$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

1. Il y a en tout $3+4+2+1+2=12$ boules. Le tableau a été complété.
2. On calcule l'espérance de X par $E(X)=x_1\cdot p(x_1)+x_2\cdot p(x_2)+\cdots+x_n\cdot p(x_n)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{12}+5\cdot\frac{1}{6}=\boxed{\frac{31}{12}}$.

Exercice 2 — 3.5 points

Au casino, on considère un jeu dont le bénéfice en euros, pour le joueur, peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi de probabilités suivante :

y_i	-2	-1	0	1	4
$P(Y=y_i)$	$0,2$	$0,2$	$0,4$	$0,15$	$0,05$

Un joueur démarre une partie de ce jeu.

C	M	R	I	Barème	
✓				0.5	1. Quelle est la probabilité que ce joueur perde 2€ sur cette partie ?
	✓			1	2. Quelle est la probabilité que ce joueur ait un bénéfice strictement positif sur cette partie ?
	✓		✓	1	3. Calculez l'espérance de Y et interprétez cette valeur en terme de bénéfice pour le joueur ou pour le casino.

Le casino décide de réduire un peu les marges qu'il fait sur une partie de ce jeu, pour attirer plus de joueurs.

C	M	R	I	Barème	
		✓	✓	1	4. Expliquez une petite modification de la loi de probablité de Y qu'il serait possible de faire pour obtenir cela.

1. Ici on demande $P(X=-2)=\boxed{0,2}$.
2. Ici on demande $P(X>0)=P(X=1)+P(X=4)=0,15+0,05=\boxed{0,2}$.
3. On calcule l'espérance de X par la formule

$$x_1\cdot p(x_1)+x_2\cdot p(x_2)+\cdots+x_n\cdot p(x_n)=-2\cdot 0,2+(-1)\cdot 0,2+0\cdot 0,4+1\cdot 0,15+4\cdot 0,05=\boxed{-0,25}$$

Cela veut dire que sur une partie, en moyenne, le joueur $\boxed{\text{perd 25 centimes}}$.

4. Pour que le casino réduise ses marges, il faut augmenter l'espérance de X (tout en ayant $E(X)<0$, le casino doit quand même gagner de l'argent). On peut faire cela par exemple en faisant l'une des choses suivantes :

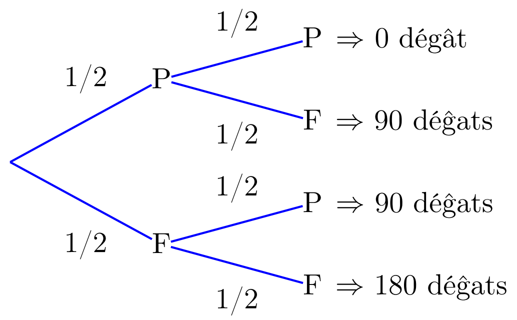
- en $\boxed{\text{réduisant la probabilité d'une perte}}$ (par exemple la probabilité de perdre 2€ : $0,2 \to 0,15$; il faut alors augmenter une autre probabilité par exemple celle de perdre 1€ passe à $0,25$)
- en $\boxed{\text{augmentant la probabilité d'un gain}}$ (par exemple la probabilité de gagner 1€ : $0,15 \to 0,2$; il faut alors baisser une autre probabilité, par exemple celle de faire partie nulle passe à $0,35$; attention à ne pas faire baisser la probabilité de gagner 4€, parce qu'alors l'espérance aura baissé)
- en $\boxed{\text{réduisant une ou plusieurs somme(s) perdue(s)}}$ (par ex. perte de 2€ $\to$ perte de 1,5€)
- $\boxed{\text{augmentant un ou plusieurs gain(s) du joueur}}$ (par ex. gain de 4€ $\to$ gain de 4,5€).

Quel que soit le choix fait, il faut bien vérifier à la fin que l'espérance est toujours strictement négative.

Exercice 3 **3.5 points**

					On décide d'utiliser l'attaque « Double Lasso » du Pokémon Crabominable : Double Lasso 90× Lancez 2 pièces. Cette attaque inflige 90 dégâts pour chaque côté face. On note X la variable aléatoire qui détermine le nombre de dégâts de cette attaque.
✓				0.5	1. Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
	✓			1	2. Déterminer la loi de probabilité de X.
	✓		✓	1	3. Combien de dégâts inflige l'attaque « Double Lasso » en moyenne ?
					Pour la question suivante, on considère en plus l'attaque « Pince-Masse » : Pince-Masse 130
		✓	✓	1	4. Vous devez infliger au moins 100 dégâts au Pokémon de votre adversaire tout de suite, sinon vous allez perdre. Vous pouvez utiliser « Double Lasso » ou « Pince-Masse ». Quelle attaque préférez-vous et pourquoi ? Même question si vous devez infliger au moins 150 dégâts au Pokémon adverse tout de suite.

1. Pour cette attaque, modélisons les possibilités par un arbre à deux étages (deux lancers). À chaque étage, on note P pour « obtenir pile » et F pour « obtenir face » ; comme la pièce est bien équilibrée, on obtient :



Du coup les valeurs possibles pour X sont $\boxed{0,\ 90 \text{ ou } 180}$.

2. Toujours grâce à l'arbre précédent, on lit que $P(X=0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (première branche), $P(X=180) = \frac{1}{4}$ également (dernière branche), et du coup $P(X=90) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (deux branches du milieu). On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	0	90	180
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

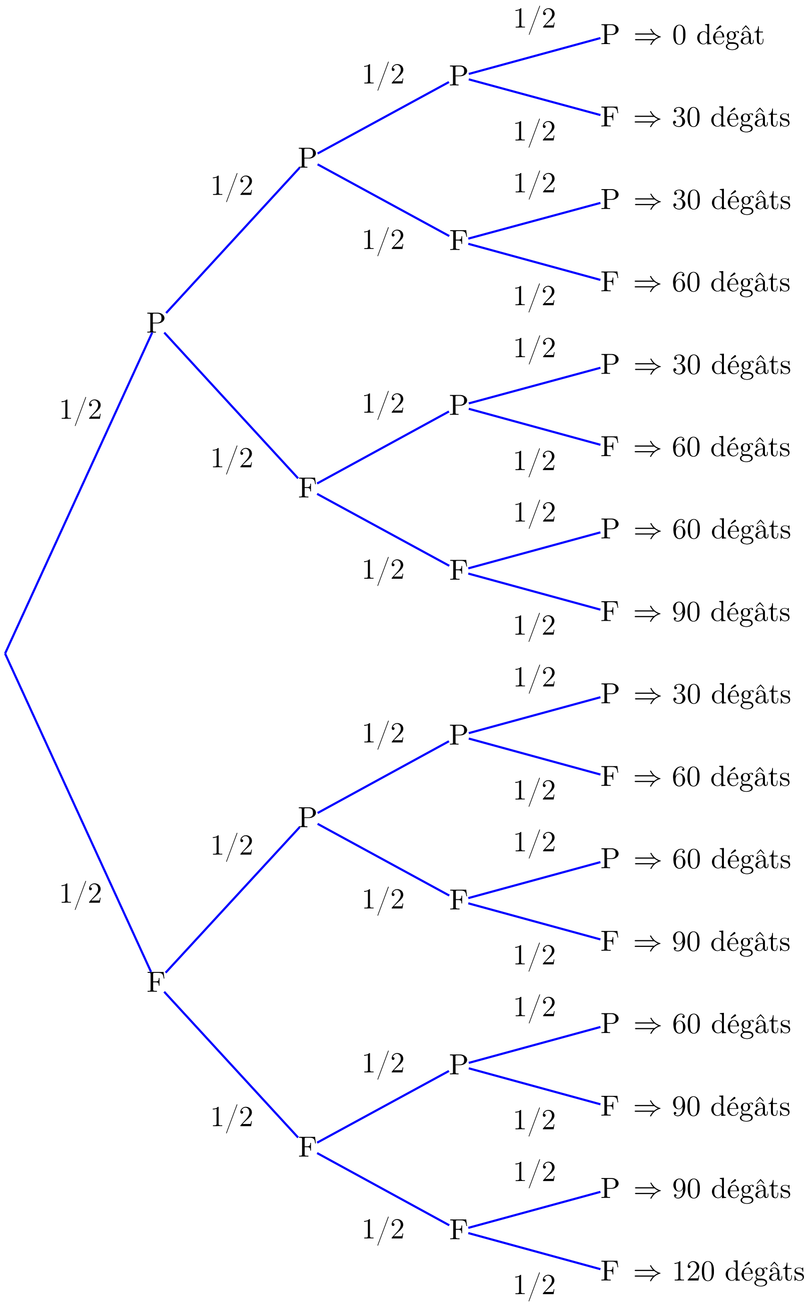
3. Cette question revient à calculer l'espérance de X, on calcule donc $0 \cdot \frac{1}{4} + 90 \cdot \frac{1}{2} + 180 \cdot \frac{1}{4} = 90$. Ainsi, l'attaque « Double Lasso » inflige en moyenne $\boxed{\text{90 dégâts}}$.
4. Pour infliger 100 dégats : l'attaque « Pince-Masse » inflige toujours 130 dégâts, on est donc garantis de réussir à infliger 100 dégâts ; l'attaque « Double Lasso », 3 fois sur 4, n'infligera pas suffisamment de dégâts (0 ou 90). C'est donc $\boxed{\text{« Pince-Masse »}}$ qu'il faut privilégier.

   Pour infliger 150 dégats : l'attaque « Pince-Masse » inflige toujours 130 dégâts, on est donc garantis de ne pas réussir à infliger 150 dégâts ; l'attaque « Double Lasso », 1 fois sur 4, infligera suffisamment de dégâts (180). C'est donc $\boxed{\text{« Double Lasso »}}$ qu'il faut privilégier.

Exercice 4 — BONUS

		✓	✓		1. On décide d'utiliser l'attaque « Renverse Désordre » du Pokémon Clic : Renverse Désordre 30× Lancez 4 pièces. Cette attaque inflige 30 dégâts multipliés par le nombre de côtés face. On note Y la variable aléatoire qui détermine le nombre de dégâts de cette attaque. Déterminer la loi de probabilité de Y.
		✓	✓		2. On décide d'utiliser l'attaque « Assaut Épineux » du Pokémon Qwilfish de Hisui : Assaut Épineux 10× Lancez une pièce jusqu'à obtenir un côté pile. Cette attaque inflige 10 dégâts pour chaque côté face. On note Z la variable aléatoire qui détermine le nombre de dégâts de cette attaque. Quelles sont les valeurs possibles pour Z ? (on pourra répondre par une phrase ou bien avec des « ... »). Donnez quelques probabilités associées aux valeurs de Z (il ne vous sera pas possible d'écrire <u>toutes</u> les probabilités).

1. Pour cette attaque, modélisons les possibilités par un arbre à quatre étages (quatre lancers). À chaque étage, on note P pour « obtenir pile » et F pour « obtenir face » ; comme la pièce est bien équilibrée, on obtient :



Sur l'arbre précédent, toutes les branches ont chacune pour probabilité $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

Du coup on lit que :

- $P(Y=0) = \dfrac{1}{16}$ (première branche) ;
- $P(Y=30) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$ (quatre branches) ;
- $P(Y=60) = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$ (six branches) ;
- $P(Y=90) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$ (quatre branches) ;
- $P(X=120) = \dfrac{1}{16}$ (dernière branche).

On en déduit la loi de probabilité de Y :

y_i	0	30	60	90	120
$P(Y=y_i)$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{16}$

2. Le nombre de lancers de pièces pour l'attaque « Assaut Épineux » n'est pas fixé à l'avance. Tant qu'on obtient « face », on continue. Du coup, le nombre de lancers n'est pas borné. Il est possible (même si très très peu probable) d'avoir un nombre de lancers aussi grand que voulu. Ainsi, les valeurs possibles pour Z sont $\boxed{\text{tous les multiples de 10}}$ (0, 10, 20, 30, ...).
   Au niveau des probabilités : si on fait pile tout de suite (1/2), on s'arrête (0 dégât) ; si on fait face puis pile (1/4), on s'arrête (10 dégâts) ; si on fait face, face, pile (1/8), on s'arrête (20 dégâts) ; si on fait face, face, face, pile (1/16), on s'arrête (30 dégâts). On déduit que la loi de probabilité de Z ressemble à :

z_i	0	10	20	30	...
$P(Z=z_i)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{16}$	...

En fait, on a la formule suivante qui donne toutes les probabilités :

$$\boxed{P(Z = 10 \times k) = \frac{1}{2^{1+k}} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}}$$

PS : Et, mais c'est tout à fait hors programme, puisque la somme des probabilités fait 1, on a donc la formule :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$$

Cette formule résume le paradoxe de Zénon : une somme infinie peut en fait aboutir à un résultat fini, donc le paradoxe de Zénon n'en est plus un !

> « Δεύτερος δ᾽ ὁ καλούμενος Ἀχιλλεύς· ἔστι δ᾽ οὗτος, ὅτι τὸ βραδύτατον οὐδέποτε καταληφθήσεται θέον ὑπὸ τοῦ ταχίστου· ἔμπροσθεν γὰρ ἀναγκαῖον ἐλθεῖν τὸ διῶκον ὅθεν ὥρμησεν τὸ φεῦγον, ὥστε ἀεί τι προέχειν ἀναγκαῖον τὸ βραδύτερον.
>
> —
>
> Le second sophisme de Zénon est celui qu'on appelle l'Achille. Il consiste à dire que jamais le plus lent, quand il est en marche, ne pourra être atteint par le plus rapide, attendu que le poursuivant doit, de toute nécessité, passer d'abord par le point d'où est parti celui qui fuit sa poursuite, et qu'ainsi le plus lent conservera constamment une certaine avance.
>
> Aristote, *Physique*, IVe siècle avant J.-C. (trad. Jules Barthélemy-Saint-Hilaire, Paris, 1862), « Livre VI, chapitre 14, § 4 », `http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/phys614.htm` »

Vous pouvez lire un article complet sur le paradoxe de Zénon au bout du lien suivant :
`http://www.martingrandjean.ch/bergson-paradoxes-zenon-achille-tortue/`

Et je termine cette correction en évoquant que le résultat qu'on vient d'écrire peut se condenser de manière précise mais absolument barbare (à notre niveau !) par la formule :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$