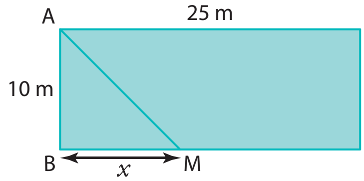
Activités

1 Modéliser une situation avec une fonction

30 min



Une piscine a pour dimensions 25 m × 10 m.
Alice se situe au point A et elle veut rejoindre l'autre côté de la piscine en ligne droite à la nage.

1. Quelle est la distance minimale que peut parcourir Alice ?
Et la distance maximale ?

2. On note x la distance entre le coin B de la piscine et le point M où elle touche le bord situé en face.

a. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

b. Justifier que la distance entre A et M est donnée par la formule $\sqrt{x^2+100}$.

Cela permet de définir la fonction f qui à la distance variable x, avec $x \in [0\,;25]$, associe la longueur AM. On a $f(x)=\sqrt{x^2+100}$.

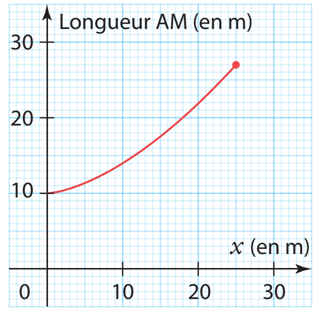
c. Quelle distance Alice parcourt-elle si $x = 12$?
Donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction f.
Les trois affirmations d'Alice suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. Si $x = 10$, je parcours environ 14 mètres.

b. Si $x \in [15\,;25]$, je suis sûre de parcourir plus de 15 mètres.

c. Il y a une valeur de x pour laquelle je peux parcourir 20 mètres.



↪ Cours 1 p. 192

2 Découvrir la notion d'équation de courbe

30 min

1. Tracer un repère orthonormé.

2. a) Tracer en rouge l'ensemble de tous les points dont l'ordonnée est égale au double de l'abscisse.

Remarque Tous les points de cette droite ont des coordonnées qui vérifient l'équation $y = 2x$ pour tout réel x.

Il s'agit de la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 2x$.

b) Le point R(250 ; 501) appartient-il à cet ensemble ?

3. a) Dans le repère, placer un maximum de points, en vert, dont l'ordonnée est égale au carré de l'abscisse.

L'ensemble de tous ces points est la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto x^2$.

b) Le point S(15 ; 225) appartient-il à cet ensemble ?

4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x^2 + x - 3$.

a) Le point T(2 ; 7) appartient-il à la représentation graphique de la fonction h ?

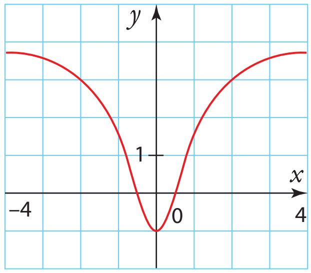
b) Placer dans le repère un maximum de points, en bleu, appartenant à la représentation graphique de la fonction h.

↪ Cours 2 p. 193

30 min

3 Découvrir la notion de parité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - \dfrac{5}{1+x^2}$ dont on donne ci-contre la courbe représentative dans un repère.



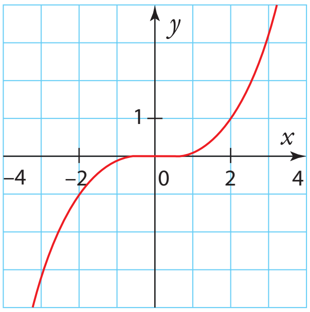
1. Erwann dit que, pour tout nombre réel x, on a $f(x) = f(-x)$.
A-t-il raison ou tort ? Justifier.

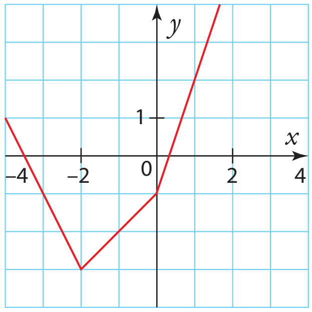
2. Comment cela se traduit-il graphiquement pour la courbe de la fonction f ?
Une telle fonction est dite paire.

3. Dans un livre, Erwann lit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est impaire si, pour tout réel x, la fonction f vérifie $f(-x) = -f(x)$.
Compléter le tableau de valeurs ci-contre sachant que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ est impaire.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$h(x)$	14			0	9	–3	

4. Parmi les deux courbes représentatives de fonctions suivantes, une seule est celle d'une fonction impaire : laquelle ?





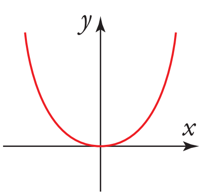
Cours 3 p. 194

15 min

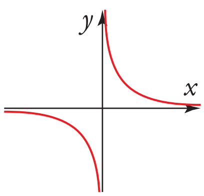
4 Découvrir les fonctions de référence

Louane a retrouvé dans son cahier de seconde plusieurs schémas de courbes représentatives de fonctions. Elle se rappelle que ce sont des fonctions de référence : la fonction carré, la fonction inverse, la fonction cube et la fonction racine carrée.
Retrouver à quelle fonction, à quel ensemble de définition et à quelle expression littérale correspond chacune des courbes représentatives des fonctions de référence suivantes.

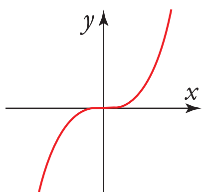
A)



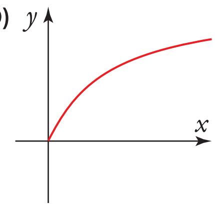
B)



C)



D)



1. fonction carré	**a)** définie sur $[0\,;+\infty[$	**I)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. fonction inverse	**b)** définie sur $\mathbb{R}$	**II)** $g(x) = \sqrt{x}$
3. fonction cube	**c)** définie sur $\mathbb{R}^*$	**III)** $h(x) = x^3$
4. fonction racine carrée	**d)** définie sur $\mathbb{R}$	**IV)** $l(x) = x^2$

Cours 4 p. 195

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

10 Chercher deux chapitres dans le manuel dont les exercices résolus sont utilisés dans ce chapitre.

11 Construire, de mémoire, une fiche permettant de résumer la définition et les propriétés de la fonction inverse, puis comparer avec le cours.

Questions - Flash

Diapo Diaporama Ressource professeur

12 Calculer $f(2)$ pour la fonction f définie par :
$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

13 h est définie par $h(x) = (2x - 6)(2x + 1)$.
Calculer $h(3)$.

14 On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par :
$k(x) = -7x + 9$.
Calculer :
a) $k(10)$ **b)** $k(-4)$ **c)** $k\left(\dfrac{3}{7}\right)$ **d)** $k(\sqrt{5})$

15 Voici un tableau de valeurs de la fonction m. Par la fonction m, donner :
a) l'image de –5. **b)** un antécédent de –1.

x	2	–5	10	–1
$m(x)$	–1	4	–1	–5

16 Quel est l'antécédent de 5 par la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 10x$?

17 On donne $f(3) = 5$. Déterminer les coordonnées d'un point appartenant à la courbe représentative de la fonction f.

18 Le point A(–1 ; 2) appartient à la courbe représentative de la fonction k.
Compléter : $k(\ldots) = \ldots$.

19 Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $f(1) = 4$ et $f(-1) = -3$.
La fonction f est-elle impaire ?

20 On considère la fonction carré $h : x \mapsto x^2$.
Déterminer par h les images de 2 ; –6 et 100.

21 Calculer.
a) 1^3 **b)** $(10^4)^3$ **c)** $(-3)^3$
d) $\sqrt{36}$ **e)** $\sqrt{1}$ **f)** $\sqrt{10^4}$

22 On considère la fonction inverse $i : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Déterminer les éventuels antécédents par i de 100 ; –1 et 0,2.

Image et antécédents AP

23 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$.
Calculer les images des nombres suivants.
a) 2 **b)** –3 **c)** 0 **d)** $\sqrt{5}$

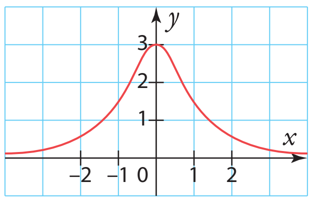
24 Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3x - 8$.
Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants.
a) 3 **b)** –5 **c)** $\dfrac{1}{2}$ **d)** 0,1

25 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \dfrac{4}{3}x + 5$.
1. Calculer $f(6)$ et $f(7)$.
2. Quelle est l'image de –5 par f ?

26 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (3 - 2x)(5x - 1)$.
Déterminer les antécédents de 0 par f.

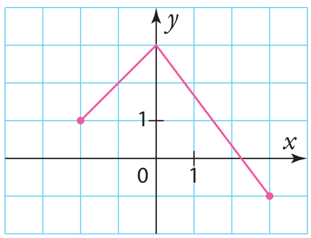
27 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \dfrac{4x + 2}{1 + x^2}$.
1. A-t-on $f(3) = 1$?
2. Les images de 2 et de 0 par f sont-elles égales ?
3. Déterminer l'image de $\dfrac{1}{2}$ par f.
4. Déterminer les antécédents de 0 par f.

28 Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Par lecture graphique, déterminer :
a) l'image de –1 par f.
b) l'image de 0 par f.
c) le (ou les) antécédent(s) de 1 par f.
d) le (ou les) antécédent(s) de 3 par f.

29 Voici la courbe représentative d'une fonction g définie sur [–2 ; 3].



Par lecture graphique, déterminer :
a) $g(0)$.
b) les images de 1 et –2 par g.
c) les antécédents éventuels de –1 ; 1 et 5.

30 Soit la fonction u définie par $u(n) = 4 + 3n$ pour tout entier naturel n.
1. Calculer, si possible, les images par u de 2 ; –4 et $\dfrac{1}{2}$.
2. Calculer les antécédents éventuels par u de 40 et 147.

Équation d'une courbe

31 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
1. a) Calculer l'image de 10 par f.
b) Le point A(10 ; 1 005) appartient-il à $\mathscr{C}_f$?
2. Calculer l'ordonnée du point B d'abscisse –2 qui appartient à $\mathscr{C}_f$.

32 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x + 1$.
1. Calculer l'image de 2.
2. En déduire les coordonnées d'un point appartenant à la courbe représentative de g.
3. Proposer les coordonnées d'un deuxième point appartenant à cette courbe.

33 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x + 2$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.
1. Le point $M\left(\frac{2}{3} ; 5\right)$ appartient-il à $\mathscr{C}_g$?
2. Calculer l'abscisse du point T appartenant à $\mathscr{C}_g$ tel que l'ordonnée de T soit nulle.

34 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+4}{x+1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
1. Le point A(0 ; 5) appartient-il à $\mathscr{C}_f$?
2. Calculer l'abscisse du point B appartenant à $\mathscr{C}_f$ tel que l'ordonnée de B soit nulle.

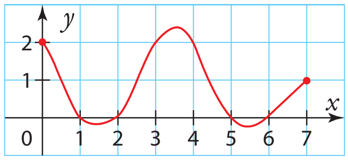
35 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3x$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
1. Écrire l'équation de la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Les points suivants appartiennent-ils à $\mathscr{C}_f$?
a) A(1 ; 1) **b)** $B\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$ **c)** C(–3 ; – 30) **d)** D(-10^2 ; – 170)

36 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 6$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
1. Le point A(–1 ; 9) appartient-il à $\mathscr{C}_f$?
2. Calculer l'ordonnée du point B d'abscisse 4 qui appartient à $\mathscr{C}_f$.
3. Existe-il des points de $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est égale à 33 ? Si oui, donner leurs coordonnées.

37 **1.** Soit la fonction h définie sur [0 ; 5] par : $h(x) = 4 - (x-3)^2$.
a) Construire un tableau de valeurs de la fonction h avec un pas de 0,5.
b) Tracer un repère et placer plusieurs points appartenant à la courbe de h.
Prendre comme unité 1 cm pour l'axe des abscisses et 1 cm pour l'axe des ordonnées.
c) Tracer à main levée la courbe de la fonction h.
2. Reprendre la question **1.** avec la fonction $h : x \mapsto \dfrac{3}{x+1}$ sur [0 ; 5].

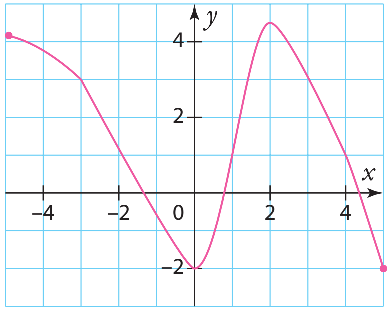
Résolution graphique d'équations et inéquations

38 Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur [0 ; 7].
Estimer les solutions des équations suivantes.



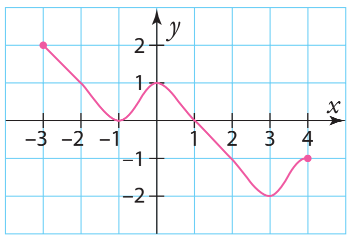
a) $f(x) = 2$ **b)** $f(x) = 0$ **c)** $f(x) = -1$ **d)** $f(x) = 1$

39 Voici la courbe représentative d'une fonction g définie sur [–5 ; 5]. Estimer les solutions des équations.



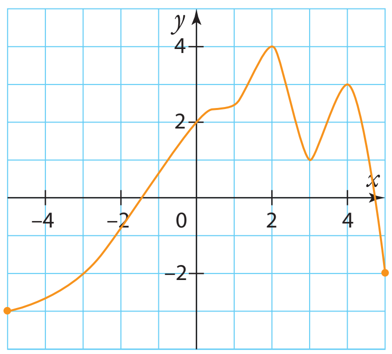
a) $g(x) = 2$
b) $g(x) = -3$
c) $g(x) = 4$
d) $g(x) = -1$

40 Voici la courbe représentative d'une fonction k définie sur [–3 ; 4].
Estimer les solutions des équations et inéquations suivantes.



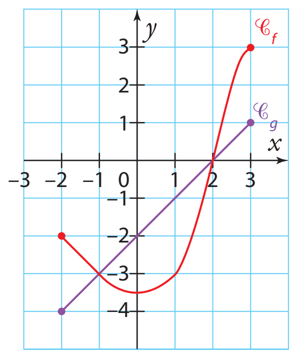
a) $k(x) = 1$
b) $k(x) = 0$
c) $k(x) > -1$
d) $k(x) < 0$
e) $k(x) \geqslant -2$
f) $k(x) \geqslant 2$

41 Voici la courbe représentative d'une fonction h définie sur [–5 ; 5]. Estimer les solutions des inéquations suivantes.



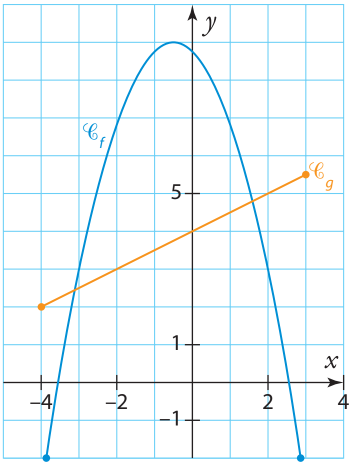
a) $h(x) \geqslant 0$
b) $h(x) < -4$
c) $h(x) < -2$
d) $h(x) > 2$

42 Voici les courbes représentatives d'une fonction f et d'une fonction g définies sur [–2 ; 3].
Résoudre graphiquement les équations et inéquations.



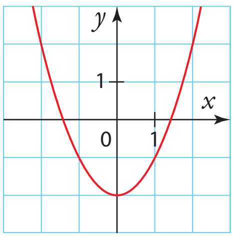
a) $g(x) = f(x)$
b) $g(x) \leqslant f(x)$
c) $f(x) < -3$
d) $g(x) < 2$
e) $f(x) \geqslant -2$

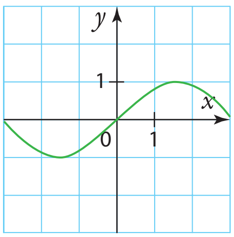
43 Voici les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-4\ ;\ 3]$.
Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.
a) $f(x) = 8$
b) $f(x) < 0$
c) $f(x) = g(x)$
d) $f(x) \leqslant g(x)$

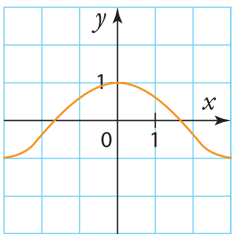


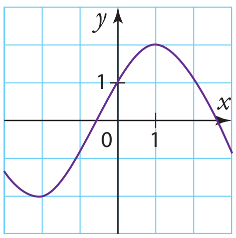
Fonctions paires et impaires

44 Pour chacune des courbes ci-dessous, dire si elle semble être la courbe représentative d'une fonction paire, d'une fonction impaire ou d'une fonction qui n'est ni paire ni impaire.

a)


b)


c)


d)


Fonctions de référence

45 Déterminer les images des nombres suivants par la fonction carré.
a) 4 **b)** -3 **c)** 10^3 **d)** $\dfrac{1}{2}$

46 Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par la fonction carré.
a) 6 **b)** 64 **c)** -2 **d)** 10^6

47 Déterminer les images des nombres suivants par la fonction inverse.
a) 5 **b)** 10^2 **c)** -3 **d)** $\dfrac{1}{4}$

48 Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par la fonction inverse.
a) 6 **b)** 1 **c)** -2 **d)** 10^4

49 Déterminer si possible les images des nombres suivants par la fonction racine carrée.
a) 4 **b)** 18 **c)** 10^8 **d)** -3

50 Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par la fonction racine carrée.
a) 6 **b)** $\sqrt{5}$ **c)** -5 **d)** 10^2

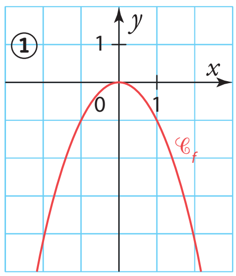
51 Déterminer les images des nombres suivants par la fonction cube.
a) 2 **b)** -3 **c)** 10^4 **d)** $\dfrac{1}{2}$

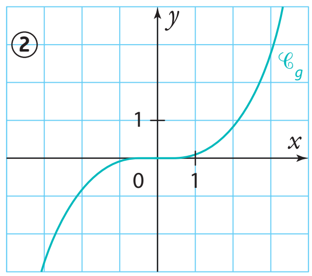
52 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
a) $x^2 \geqslant 9$ **b)** $x^2 < 5$ **c)** $\dfrac{1}{x} < 5$
d) $\dfrac{1}{x} \geqslant -2$ **e)** $\sqrt{x} \leqslant 3$ **f)** $\sqrt{x} > 9$

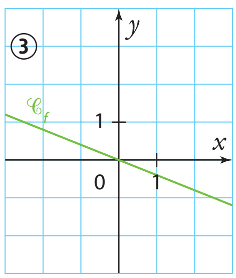
53 Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions affines (préciser m et p de $mx + p$) ?
a) $f : x \mapsto -2x + 8$ **b)** $g : x \mapsto 2x^2 - 4x + 1$
c) $h : x \mapsto -3 + \dfrac{1}{x}$ **d)** $i : x \mapsto \dfrac{2x + 8}{4}$

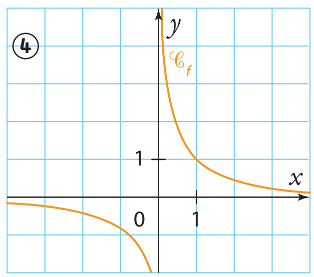
54 Dans un repère, représenter graphiquement les fonctions affines suivantes.
a) $f : x \mapsto -2x + 3$ **b)** $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}x - 4$
c) $h : x \mapsto 2 - x$ **d)** $m : x \mapsto 3x - 3$

55 Indiquer, si possible, à quelle fonction ou famille de fonctions ces courbes vous font penser.









Calculs et automatismes

56 Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty]$ par $g(t) = \dfrac{5t}{1+t}$.
Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(9)$.

57 Soit $A = 3(x-1)^2 - 12$ et $B = 3(x-3)(x+1)$ pour tout réel x. Développer les expressions A et B.

Ensemble de définition et modélisation

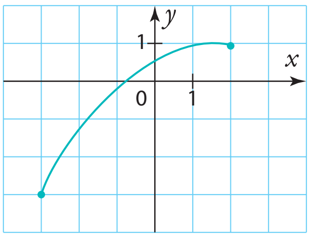
58 On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ et dont l'ensemble de définition est le plus grand possible.
1. Résoudre $x-1=0$.
2. De quel(s) nombre(s) ne peut-on pas calculer l'image par f ?
3. En déduire l'ensemble de définition de f.

59 Pour chacune des fonctions dont on donne les expressions ci-dessous, essayer d'établir le plus grand ensemble de définition possible.

a) $f(x)=\dfrac{5+x}{10-x}$ **b)** $g(x)=2\sqrt{x}+3$

c) $h(x)=\dfrac{3x+x^2}{2}$ **d)** $i(x)=4x+\dfrac{1}{x}$

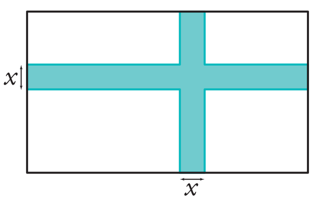
60 Voici la courbe représentative d'une fonction f. Par lecture graphique, déterminer l'ensemble de définition de f.



61 Le prix de l'essence sans plomb est de 1,40 euro le litre. Marius veut faire le plein de sa voiture. Il compte mettre x litres dans son réservoir vide qui peut contenir 40 litres.

La station dans laquelle il se sert ne délivre pas moins de 5 litres.
On considère la fonction P qui à chaque valeur de x associe le prix payé par Marius.
1. D'après le contexte de l'exercice, à quel intervalle x appartient-il ?
2. Quel est l'ensemble de définition de la fonction P ?
3. Déterminer l'expression algébrique de la fonction P.

62 On considère un rectangle de longueur 7 et de largeur 5.
On trace à l'intérieur de celui-ci une croix de largeur x variable comme indiqué ci-dessous.
On s'intéresse à l'aire de la croix bleue.
1. À quel intervalle x appartient-il ?
2. Exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$ de la croix bleue en fonction de x.
3. Avec la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de $\mathscr{A}$ avec un pas de 1.



63 On considère le programme ci-dessous. **Algo & Prog**

```
x=float(input("Saisir une valeur de x:"))
if x>=-1 and x<=5:
    y=3*x*x-2*x+12
    print("L'image de",x,"par g est",y)
else:
    print("La fonction n'est pas définie en",x)
```

Ce programme permet d'afficher l'image d'un nombre par une fonction g.
Donner $g(x)$ et l'ensemble de définition de g.

64 Soit une fonction r définie par $r(x)=\sqrt{x^2+1}$.
1. Expliquer pourquoi cette fonction peut être définie pour tout nombre réel x.
2. Avec la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de r sur $[-10\,;\,10]$ avec un pas de 1.

65 On considère la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{6x+12}$ et dont l'ensemble de définition est le plus grand possible.
1. Qu'est-ce qui pourrait éventuellement poser problème dans le calcul d'une image par cette fonction ?
2. En déduire l'ensemble de définition de g.

Recherche d'antécédents

66 Soit la fonction f définie par $f(t)=2(t+7)^2-4$ et dont l'ensemble de définition est le plus grand possible.
1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Trouver les antécédents de 6 par f.

67 On considère la fonction m définie par $m(x)=\dfrac{2x}{x-5}$ et dont l'ensemble de définition est le plus grand possible.
1. Quel est l'ensemble de définition de m ?
2. Trouver les éventuels antécédents de 6 et de -2 par m.

68 Même exercice que le précédent avec la fonction m définie par $m(x)=\sqrt{x}-1$.

69 **1.** À l'aide de la calculatrice, recopier et compléter le tableau de valeurs de la fonction h définie sur $[-2\,;\,2]$ par $h(x)=(3x+1)(5-x)$.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2
$h(x)$									

2. Déterminer tous les antécédents de 0 par h.

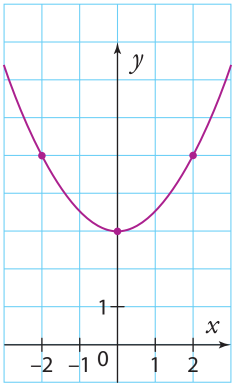
70 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x+5$. **Algo & Prog**
1. Déterminer le ou les antécédents de -2 par f.
2. Écrire un algorithme ou un programme qui :
– demande une valeur b à l'utilisateur ;
– calcule puis affiche le ou les antécédents de b par la fonction f.

71 **1.** Déterminer a et b pour que le tableau ci-dessous soit un tableau de valeurs d'une fonction h définie par $h(x) = x^2 + ax + b$ sur $\mathbb{R}$.

x	-1	0	1	2
$h(x)$	-9	-7	-3	3

2. La fonction h est-elle paire ? impaire ?
3. Déterminer les antécédents de -7 par h.

72 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne la courbe ci-dessous.



Sachant que la fonction f a une expression de la forme $f(x) = ax^2 + b$, déterminer les antécédents de 10 par f.

73 Chimie La concentration massique C_m d'un soluté est égale à la masse en grammes de soluté par litre de solution (elle s'exprime donc en grammes par litre). Elle se calcule avec la formule $C_m = \frac{m}{V}$ où m est la masse en grammes de soluté et V le volume en litre de la solution.
On dissout 10 g de chlorure de sodium (sel) dans un volume V en litre d'eau avec $V \in [0{,}2 ; 0{,}5]$.
1. Écrire la formule donnant la concentration massique $C_m(V)$ du chlorure de sodium en fonction du volume V de la solution.
2. Résoudre $C_m(V) = 30$.
3. Traduire le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

74 Pour tout nombre réel k, la solution de l'équation $x^3 = k$ s'appelle la racine cubique de k et se note $\sqrt[3]{k}$.

Exemple : La racine cubique de 8 est égale à 2 car $2^3 = 8$.
La calculatrice peut en donner une valeur exacte ou approchée en utilisant par exemple l'exposant $\frac{1}{3}$: $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}71$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $x^3 = -8$ **b)** $x^3 = 20$ **c)** $x^3 = 10^6$
2. Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par la fonction cube.
a) 125 **b)** 0 **c)** 20 **d)** 10^9
3. En vous aidant de la courbe de la fonction cube, résoudre les inéquations suivantes.
a) $x^3 \geqslant 8$ **b)** $x^3 < 1$ **c)** $x^3 \leqslant 4$

Courbes et équations

75 Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + p$ où p est un nombre.
Trouver p sachant que A(5 ; 22) appartient à la courbe de f.

76 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $g(x) = \frac{4x+6}{1+x}$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.
1. Le point A(−2 ; 2) appartient-il à $\mathscr{C}_g$?
2. B(x_B ; 5) appartient à $\mathscr{C}_g$. Déterminer l'abscisse x_B du point B.

77 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 15$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de f avec les axes du repère.

78 Dans un repère, on considère l'ensemble d'équation $3x^2 + 2y - 4 = 0$.
1. Montrer que le point A(−2 ; −4) appartient à cet ensemble.
2. B appartient à cet ensemble et son abscisse est égale à 0. Calculer l'ordonnée de B.
3. Montrer que cet ensemble est la courbe d'une fonction f puis préciser $f(x)$.

79 Montrer que l'ensemble d'équation $yx^2 + y - 1 = 0$ est la courbe d'une fonction h puis préciser $h(x)$.

80 Dans un repère, on considère l'ensemble d'équation $xy = 5$.
1. Le point Z(2 ; 1,5) appartient-il à cet ensemble ?
2. Existe-il un point d'abscisse nulle appartenant à cet ensemble ?
3. Montrer que cet ensemble est la courbe d'une fonction f, puis préciser son ensemble de définition et son expression.

Fonction et nombre entier

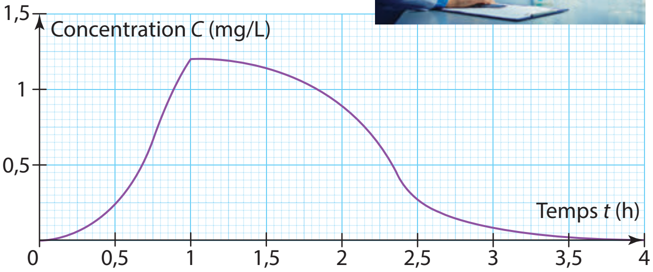
81 On étudie le processus p qui à tout entier compris entre 1 et 199 associe son chiffres des dizaines.
1. Donner $p(124)$.
2. Trouver, si possible, un réel x tel que :
- $p(x) = 6$
- $p(x) = 0$

3. Donner le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de 2 par p.

82 Malo a 150 euros sur un compte en banque. Tous les ans, il rajoute 20 euros sur celui-ci.
On note $u(n)$ la somme qu'il a sur son compte l'année numéro n.
Ainsi $u(1) = 150$ et $u(2) = 170$.
1. Calculer $u(4)$.
2. Trouver une formule pour $u(n)$ et préciser les valeurs de n possibles.
3. Déterminer le numéro de l'année où il pourra acheter avec l'argent de son compte une console de jeu qui coûte 350 euros.

Résolution d'équations et inéquations

83 Chimie On a mesuré, en continu pendant quatre heures, la concentration C d'un médicament dans le sang d'un patient. La fonction C est représentée ci-dessous.



1. Quelle est la concentration du médicament dans le sang au bout de 2 h ?

a) environ 0,5 **b)** environ 1
c) environ 1,5 **d)** environ 0,9

2. Laquelle (lesquelles) de(s) (in)équations suivantes a pour solution l'intervalle de temps où la concentration du médicament est au plus égale à 1 ?

a) $C(t) > 1$ **b)** $C(t) = 1$
c) $C(t) < 1$ **d)** $C(t) \leqslant 1$

3. Au bout de combien de temps la concentration dans le sang est-elle de 0,5 mg/L ?

a) ≈ 40 min **b)** ≈ 2 h 20 min **c)** ≈ 0,667 h

4. Ce médicament est jugé efficace quand la concentration dans le sang dépasse 0,75 mg/L.
Quelle est donc sa période d'efficacité ? (Arrondir grossièrement.)

a) jusqu'à 2 h **b)** jusqu'à 4 h
c) dès 45 min **d)** entre 0,75 et 2,2 h

5. Au bout de combien de temps le médicament est-il le plus concentré ?

a) ≈ 1 h **b)** ≈ 1 h 30 min
c) ≈ 1 h 50 min **d)** ≈ 6 h

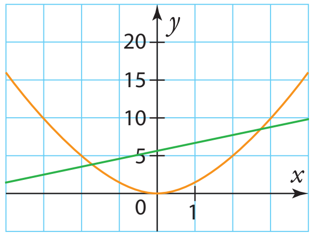
6. Quelle est alors la concentration du médicament dans le sang en mg/L ?

a) ≈ 1 **b)** ≈ 1,2
c) ≈ 1,25 **d)** ≈ 5,8

84 Une fonction f a les propriétés suivantes :
– elle est définie sur $[0 ; 8]$;
– l'équation $f(x) = 3$ a deux solutions : 1 et 3 ;
– l'image de 0 est 1 ;
– l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ a pour ensemble de solution $[5 ; 7]$.
Tracer dans un repère une courbe possible pour la fonction f.

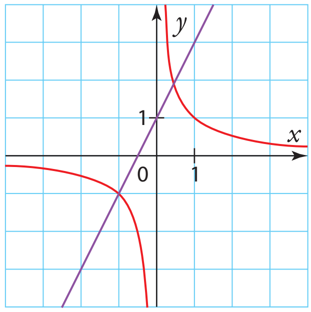
85 **1.** Trouver les coordonnées du ou des points d'intersection des courbes d'équations $y = 2x^2 + 2x + 6$ et $y = 2x^2 - 3x + 7$.
2. Même question pour les courbes d'équations $y = \dfrac{1}{x}$ et $y = \dfrac{2+3x}{x}$.

86 On considère les courbes représentatives de la fonction carré, notée f, et de la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 6$. Elles sont tracées dans le repère ci-dessous.



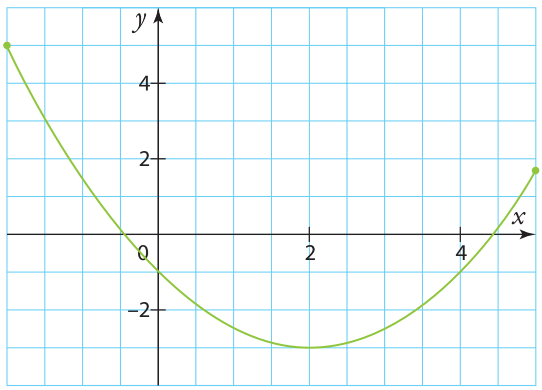
1. Repérer les courbes associées aux deux fonctions.
2. Résoudre graphiquement l'équation $x^2 = x + 6$.
3. a) Développer l'expression $(x - 3)(x + 2)$.
b) Retrouver algébriquement les résultats obtenus à la question **2.**

87 On considère les courbes représentatives de la fonction inverse, notée f, et de la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 1$. Elles sont tracées dans le repère ci-contre.



1. Repérer les courbes associées aux deux fonctions.
2. Résoudre graphiquement l'équation $\dfrac{1}{x} = 2x + 1$.
3. a) Développer l'expression $(2x - 1)(x + 1)$.
b) Retrouver algébriquement les résultats obtenus à la question **2.**

88 On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-2 ; 5]$ par $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 1$.



1. Estimer graphiquement les deux solutions de l'équation $f(x) = 1$.
2. Voici un tableau de valeurs de la fonction f.

x	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
$f(x)$	0,125	0,38	0,645	0,92	1,205	1,5

a) Donner un encadrement d'une des solutions de l'équation $f(x) = 1$.
b) Quelle est la précision de cette approximation ?
3. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au dixième près, puis au centième près de l'autre solution.

89 Sandra a tracé à l'aide de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-5 ; 3]$ par $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 1$.
Elle affirme que l'équation $-0{,}5x^2 - 3x + 1 = 0$ a trois solutions.
1. Que peut-on penser de son affirmation ?
2. Donner un encadrement à 0,1 près de chacune des solutions de cette équation.

90 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 0{,}5(x+1)^2 - 1$.
1. Construire un tableau de valeurs de f pour x allant de -4 à 3 avec un pas de 1.
2. Tracer dans un repère la courbe représentative de f. Prendre comme unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
3. Résoudre graphiquement $f(x) > 2$.

91 **1.** Tracer dans un même repère les courbes représentatives de la fonction carré f et de la fonction affine $g : x \mapsto 0{,}5x + 1$ sur $[-1 ; 3]$.
2. Résoudre graphiquement $f(x) \geqslant g(x)$.

Avec la forme la plus adaptée

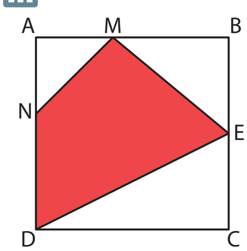
92 Soit f, g, h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
- $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$
- $g(x) = 2(x+1)^2 - 8$
- $h(x) = 2(x-1)(x+3)$

1. Montrer que $f(x)$, $g(x)$, et $h(x)$ sont trois expressions de la même fonction.
2. Répondre aux questions suivantes en choisissant à chaque fois la forme la plus adaptée.
a) Chercher les éventuels antécédents de 0 et de -6.
b) Calculer les images de 0, de 1 et de $\sqrt{3} - 1$.
c) Trouver les abscisses des points de f d'ordonnée égale à 24 appartenant à la courbe de f.

93 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 1)(x + 5)$.
1. Développer $f(x)$.
2. En utilisant la forme la plus adaptée, répondre aux questions suivantes.
a) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.
b) Résoudre $f(x) = x + 5$.

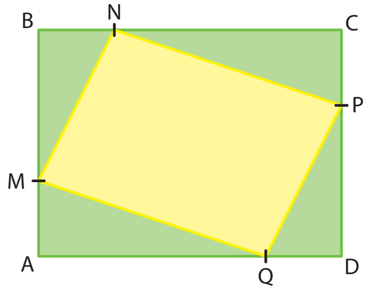
Modélisation et problèmes

94 ABCD est un carré de côté 6.
E est le milieu de [BC].
M est un point du segment [AB] et N est le point du segment [AD] tel que AN = AM. On pose AM = x. On s'intéresse à l'aire rouge.



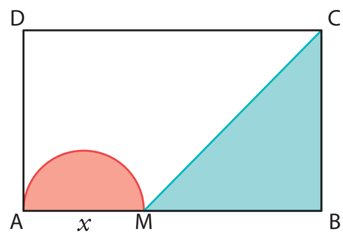
1. À quel intervalle x appartient-il ?
2. Exprimer en fonction de x les aires des triangles AMN et MBE.
3. Exprimer en fonction de x l'aire $\mathscr{A}$ de NMED.
4. Construire un tableau de valeurs de $\mathscr{A}(x)$ avec un pas de 0,5 à la calculatrice.

95 On considère un rectangle ABCD de dimensions AB = 6 cm et BC = 8 cm.
Sur le côté [AB], on place un point M quelconque. On considère ensuite les points N sur [BC], P sur [CD] et Q sur [DA] tels que AM = BN = CP = DQ.
On pose AM = x. On appelle f la fonction qui à x associe la valeur de l'aire de MNPQ.



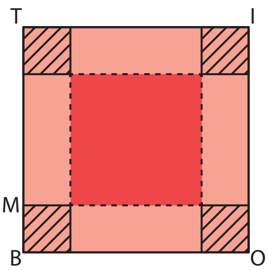
1. AM peut-elle prendre la valeur 7 ?
Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Démontrer que $f(x) = 2x^2 - 14x + 48$.
3. À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, tracer la courbe représentative de f. Ajuster la fenêtre d'affichage.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de MNPQ est-elle supérieure ou égale à 24 cm² ?

96 Soit ABCD un rectangle. On place un point M libre sur le segment [AB]. Comme sur la figure ci-contre, on trace un demi-cercle de diamètre [AM] et le triangle MBC. On note x la distance AM.



Le graphique représente les aires $f(x)$ et $g(x)$ du demi-disque et du triangle.
1. Identifier les courbes de f et de g. Justifier.
2. Retrouver les dimensions du rectangle ABCD.
3. Estimer graphiquement la valeur de x pour que le demi-disque et le triangle aient la même aire, puis en donner une valeur approchée au centième.

97 On considère un carré de côté 15 cm. Dans chaque coin, on découpe un même carré pour obtenir un patron d'une boite sans couvercle.



A. Un cas particulier

1. Construire le patron d'une boite en choisissant BM = 3 cm.

2. Calculer son volume.

3. Peut-on réaliser une boite sachant que BM = 8 cm ? Expliquer.

B. Une fonction

On pose BM = x et on appelle V la fonction qui à x associe le volume de la boîte sans couvercle.

1. Déterminer une expression de la fonction V.

2. Quel est l'ensemble de définition de V ?

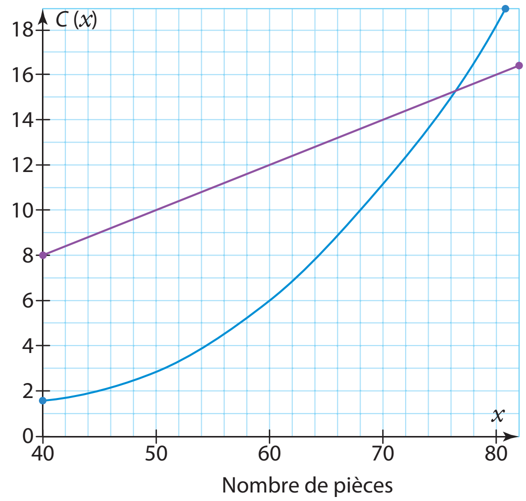
3. À l'aide d'une calculatrice, ou d'un logiciel, tracer la courbe représentative de la fonction V.

4. Pour quelles valeurs de x le volume est-il supérieur ou égal à 100 cm^3 ?

5. Le volume de cette boîte peut-il dépasser 1 dL ?
Si oui, donner les dimensions d'une boite vérifiant cette condition. Si non, expliquer pourquoi.

98 Une entreprise fabrique des pièces détachées pour automobiles. SES

On note x le nombre de pièces fabriquées au cours d'une journée. Le coût de production, en centaines d'euros, de x pièces est noté $C(x)$. On a représenté en bleu la courbe de la fonction C sur l'intervalle [40 ; 80].



À l'aide du graphique, répondre aux deux questions suivantes.

1. Quel est le coût de production de 50 pièces ?

2. Pour un coût de production de 1 400 euros, combien de pièces l'entreprise va-t-elle fabriquer ?

On suppose que, sur l'intervalle [40 ; 80], la fonction C est définie par $C(x) = 0{,}01x^2 - 0{,}79x + 17{,}40$.

3. Chaque pièce est vendue 20 euros. Déterminer la recette $R(x)$, en centaines d'euros, de l'entreprise pour x pièces fabriquées.

4. Vérifier que la droite tracée en violet est bien la représentation graphique de la fonction R.

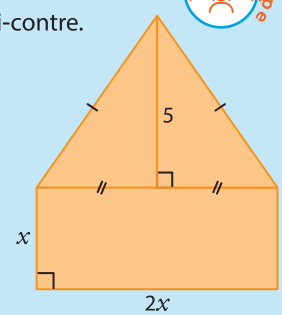
5. Le bénéfice réalisé par l'entreprise, en fonction du nombre x de pièces vendues, est la différence entre la recette et le coût de production.
Quel nombre de pièces l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice positif ?

99 ABC est un triangle rectangle en A dont les trois côtés ont pour longueurs des nombres entiers. On sait que AB mesure moins de 100 cm et AC = AB + 2. Déterminer les mesures des deux triangles satisfaisant ces conditions. **Problème ouvert**

Travailler autrement

100 Chaque groupe écrira un compte-rendu détaillant la démarche effectuée et une conclusion au problème. **Problème ouvert** **En groupe**

On considère la figure ci-contre.
Quelles valeurs peut-on donner à x pour que l'aire de cette figure ne dépasse pas 100 ?



101 Chercher le nom d'un mathématicien célèbre dont l'année de naissance est donnée par l'énigme suivante : **À l'oral**

– l'image de 100 par la fonction f est le premier nombre ;

– l'ordonnée du point d'abscisse –1 de la courbe de g est le deuxième nombre ;

– le nombre de solution de l'équation $f(x) = 1$ est le troisième nombre ;

– la solution de $x^3 = 343$ est le quatrième nombre ;

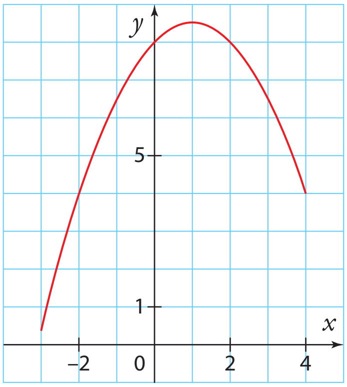
sachant que f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire, telle que $f(-100) = 1$ et que $f(x) \geqslant 3$, pour tout réel x, et g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x(-4 + 3x)$.

Exercices bilan

102 Lecture graphique et calcul

A. Lecture graphique

On considère une fonction f dont on donne la représentation graphique sur $[3\,;4]$.



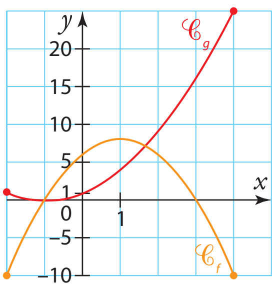
1. Déterminer l'image de 2.
2. Donner la valeur de $f(-2)$.
3. Donner une valeur approchée des antécedents de 5.
4. Résoudre $f(x) = 4$.
5. Résoudre $f(x) < 6$.
6. Résoudre $f(x) \geqslant 8$.

B. Calcul algébrique

On admet que $f(x) = -0{,}5x^2 + x + 8$ pour tout réel x.
1. Calculer l'image de 3.
2. Le point A$(-1\,;6{,}6)$ appartient-il à la courbe de f ?

103 Lecture et calcul

On donne ci-contre les courbes représentatives de deux fonctions f et g sur $[-2\,;4]$.



A. Lecture graphique

Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.

a) $f(x) = -10$ **b)** $f(x) > 5$
c) $f(x) \leqslant 0$ **d)** $f(x) = g(x)$

B. Calcul algébrique

Dans cette partie, on admet que les fonctions f et g sont définies sur $[-2\,;4]$ par $f(x) = (x+1)(6-2x)$ et $g(x) = x^2 + 2x + 1$.
1. Développer $f(x)$.
2. Montrer que $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$ pour tout réel x de $[-2\,;4]$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée, répondre aux questions suivantes.
a) Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses.
b) Déterminer les antécédents de 4 par la fonction f.
4. On donne la capture d'écran ci-dessous.

Résoudre $((x+1)(6-2x) = x^2 + 2 * x + 1)$
$\left[-1\,;\dfrac{5}{3}\right]$

Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes des fonctions f et g.

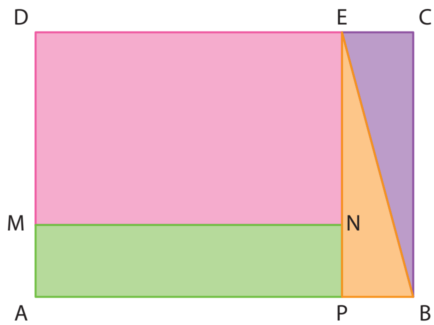
104 Hauteur d'une fusée Physique

Dans le cadre d'un projet, un groupe a lancé un petit prototype de fusée. La hauteur h en mètres du projectile en fonction du temps t en secondes a pu être modélisée par la fonction h définie par $h(t) = 25t - 5t^2$.

1. Quelle est la hauteur du projectile au bout de 3 secondes ?
2. Au bout de combien de temps la fusée retombe-t-elle au sol ?
3. Construire un tableau de valeurs de la fonction h avec un pas de 0,5.
4. Trouver à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de la durée pendant laquelle la fusée reste à une altitude supérieure ou égale à 10 m.

105 Avec des aires

ABCD est un rectangle tel que AB = 10 et AD = 7. M est un point de [AD]. P est le point de [AB] tel que BP = AM.
N est le point tel que AMNP est un rectangle et (NP) coupe (DC) en E.
On pose x = AM.
On s'intéresse à la fonction $\mathscr{A}$ donnant l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle AMNP en fonction de x.



1. Montrer que $\mathscr{A}(x) = 10x - x^2$ et préciser l'ensemble de définition de $\mathscr{A}$.
2. Construire un tableau de valeurs pour x allant de 0 à 7 avec un pas de 1.
3. Concernant la fonction $\mathscr{A}$, déterminer les valeurs suivantes que l'on peut saisir dans la calculatrice afin d'avoir une fenêtre adaptée :
• Xmin = … • Xmax = …
• Ymin = … • Ymax = …
4. Tracer avec la calculatrice la courbe de la fonction $\mathscr{A}$.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du rectangle AMNP est-elle supérieure ou égale à 20 cm^2 ?
6. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du rectangle AMNP est égale à l'aire du triangle BEP ? Expliquer la démarche.

Exercices d'approfondissement

Démonstration

106 Symétrie et fonction impaire

Démontrer que dans un repère la courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Coup de pouce
On pourra s'appuyer sur la démonstration de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées de la courbe d'une fonction paire (voir le cours).

107 Parité et calcul

Soit la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = 9x^2 - 4$ et $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses.

2. A-t-on $m(-x) = m(x)$ pour tout réel x ?

3. La fonction m est-elle paire ou impaire ?

108 Paire ou impaire ?

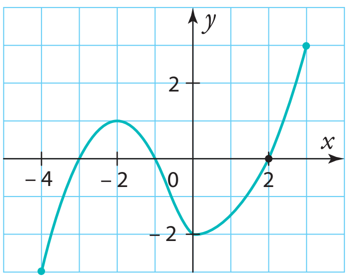
Déterminer si chacune des fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, suivantes est paire, impaire ou ni paire ni impaire.

a) $f(x) = 2x^3 + 4$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+1}$

c) $f(x) = 4x + 2$ **d)** $f(x) = 3x + x^3$

109 Avec un paramètre

On considère une fonction f définie sur $[-4 ; 3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



1. Résoudre $f(x) = 0$.

2. Résoudre $f(x) = 2$.

3. Donner un nombre réel t, différent de 2, tel que l'équation $f(x) = t$ ait une seule solution.

4. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ suivant les valeurs de m.

110 Non linéarité de fonctions

On considère l'affirmation suivante où f est une fonction : pour tous nombres x_1 et x_2, on a $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

1. La fonction carré vérifie-t-elle cette affirmation ?

2. La fonction inverse vérifie-t-elle cette affirmation ?

111 Parabole

Soit un point $A(x_A ; y_A)$ fixé avec $y_A \neq 0$ et $M(x ; y)$ dans un repère orthonormé.

1. Montrer que M est à égale distance de A et (Ox) si et seulement si $y^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$.

2. En déduire que M appartient à la courbe d'une fonction f dont on donnera l'expression en fonction de x_A et y_A.

112 Vrai ou faux ?

Logique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x - a)^2 + 4$$

où a est un paramètre (a un nombre réel quelconque).
Pour chacune des propositions ci-dessous, dire, en justifiant, si elle est vraie.

a) Si $f(x) = 4$ alors $x = a$.

b) Pour toute valeur de a, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions.

c) Pour toute valeur de a, le point de coordonnées $(3a ; 4(1 + a^2))$ appartient à la courbe de f.

d) Il existe une valeur de a pour laquelle la fonction f est paire.

113 Somme des chiffres

On considère la fonction qui à tout nombre entier naturel associe la somme de ses chiffres.

1. Qu'obtient-on à partir du nombre 13 717 ?

2. Proposer un antécédent de 22.

3. Combien de nombres de l'intervalle $]0 ; 10\,000]$ permettent d'obtenir 3 ?
Expliquer.

4. Est-ce que tout entier naturel peut être le résultat de ce processus ?

114 Lien des fonctions carré et racine carrée

1. Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, tracer la représentation de la fonction racine carrée sur $[0 ; 9]$.

2. Tracer la droite Δ d'équation $y = x$.

3. Tracer la courbe symétrique par rapport à la droite Δ de la représentation graphique de la fonction racine carrée.

4. Cette courbe est une portion de la courbe d'une fonction connue. Laquelle ?

5. a) Pour tout réel x positif, que vaut $\sqrt{x^2}$?

b) Pour tout réel x positif, que vaut $\left(\sqrt{x}\right)^2$?

Remarque : On dit que les fonctions carré et racine carrée sur $[0 ; +\infty]$ sont réciproques. Graphiquement, cela se traduit par la symétrie observée dans l'exercice.

Vers la 1re

Orientation

115 Spécialité Maths

On considère la fonction carré f.

1. Calculer $f(a + h)$ en fonction de a et h.

2. Pour $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est donné par $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
Montrer que ce taux d'accroissement est égal à $2a + h$.

116 STMG STL STI2D

Soit u la fonction qui à tout entier naturel n associe $u(n) = 3 \times 2^n$.

1. Calculer $u(1)$ et $u(2)$.

2. Édith dit que $u(n)$ ne peut pas être supérieur à 1 000.
Que peut-on en penser ?