Cours

1 Variables aléatoires réelles

On considère une expérience aléatoire dont l'univers $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; e_3 ; \dots ; e_r\}$ est fini et une loi de probabilité p sur Ω.

Définition Variable aléatoire réelle (discrète)

Une variable aléatoire réelle X sur Ω est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un nombre réel.

Notation a étant un nombre réel, on note $\{X = a\}$ l'événement X prend la valeur a et $p(X = a)$ sa probabilité.

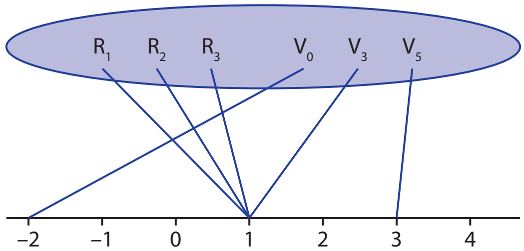
Exemple

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : trois boules sont rouges numérotées de 1 à 3 (R_1, R_2, R_3) et trois boules sont vertes numérotées 0, 3 et 5 (V_0, V_3, V_5).

Un joueur mise 2 € et tire une boule au hasard. Si elle est rouge, il gagne 3 € ; si elle est verte, il gagne en euros la valeur du numéro indiqué.

L'univers associé à l'expérience aléatoire est $\Omega = \{R_1, R_2, R_3, V_0, V_3, V_5\}$. Toutes les issues sont équiprobables.

La variable aléatoire X qui, à chaque boule choisie, associe le gain en tenant compte de la mise, peut prendre comme valeur : 3 (en prenant la boule V_5 et en soustrayant la mise) ; 1 (en prenant une boule rouge ou la boule V_3 et en soustrayant la mise) et –2 (en prenant la boule V_0 et en soustrayant la mise).



L'événement X prend la valeur 3, noté $\{X = 3\}$, est réalisé lorsque le joueur tire la boule V_5.

Sa probabilité est $p(X = 3) = \frac{1}{6}$ car la probabilité de tirer au hasard la boule V_5 est $\frac{1}{6}$.

Définition

Soit X une variable aléatoire sur Ω prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
Lorsqu'à chaque valeur x_i, on associe la probabilité $p_i = p(X = x_i)$, on définit la loi de probabilité de X.

Remarques

- La loi de probabilité d'une variable aléatoire X peut se présenter sous la forme d'un tableau.
- La somme des probabilités de toutes valeurs prises par la variable aléatoire est égale à 1. On a : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Exemple

Dans l'exemple précédent, X peut prendre les valeurs 3, 1 et –2. De plus, on a :

- $p(X = 3) = p(\{V_5\}) = \frac{1}{6}$.
- $p(X = 1) = p(\{R_1 ; R_2 ; R_3 ; V_3\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
- $p(X = -2) = p(\{V_0\}) = \frac{1}{6}$.

On en déduit que la loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-contre.

x_i	–2	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Remarques

- Les notations $\{X \geqslant a\}$, $\{X = a\}$, ... permettent de définir des événements en lien avec les variables aléatoires.
- Dans l'exemple, on peut calculer la probabilité de l'événement $\{X \geqslant 0\}$, c'est-à-dire la probabilité que le gain soit positif, que l'on note $p(X \geqslant 0)$: on a $p(X \geqslant 0) = p(X = 1) + p(X = 3) = \frac{5}{6}$.

Exercices résolus 1 p. 305 2 p. 306

2 Espérance – Variance – Écart-type

a Définitions

Dans ce paragraphe, X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Définition Espérance

L'espérance de X est le nombre réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n.$$

Exemple

On considère une variable aléatoire Y dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

y_i	-4	0	4	20
$p(Y = y_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1

On a : $E(Y) = 0{,}5 \times (-4) + 0{,}2 \times 0 + 0{,}2 \times 4 + 0{,}1 \times 20 = 0{,}8$.

Remarques

- Lorsque X est une variable aléatoire donnant le gain algébrique à un jeu, $E(X)$ est le gain moyen que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties à ce jeu.
- Un jeu est équitable si l'espérance de la variable aléatoire donnant le gain algébrique est nulle.

↪ Exercice résolu 3 p. 307

Définition Variance

La variance de X est le nombre réel noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2.$$

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a :
$V(Y) = 0{,}5 \times (-4 - 0{,}8)^2 + 0{,}2 \times (0 - 0{,}8)^2 + 0{,}2 \times (4 - 0{,}8)^2 + 0{,}1 \times (20 - 0{,}8)^2 = 50{,}56$.

Définition Écart-type

L'écart-type de X est le nombre réel noté $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a : $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{50{,}56} \approx 7{,}11$.

Remarques

- Ces définitions sont à mettre en lien avec celles de moyenne, variance et écart-type d'une série statistique. On peut donc aussi utiliser la calculatrice ou un tableur pour déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire si on a résumé la loi de probabilité de la variable aléatoire dans un tableau (voir le TP1).
- Comme en statistiques, l'écart-type permet de se donner une idée de la répartition des valeurs prises par une variable autour de son espérance en tenant compte des probabilités. Plus l'écart-type est grand, plus les valeurs prises par la variable aléatoire sont « éloignées » de l'espérance.

1 Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire

Cours 1 p. 302

On propose le jeu suivant : on mise 5 € puis on lance deux fois de suite une pièce équilibrée. On gagne ensuite 4 € par Pile obtenu.

Par exemple si on fait deux fois Pile, on gagne 4 + 4 – 5 = 3 €.

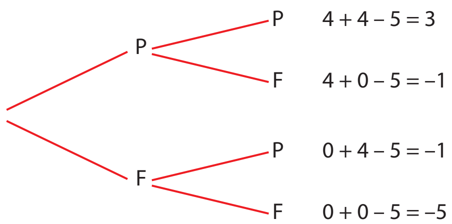
Soit *X* la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu en tenant compte de la mise.

Déterminer la loi de probabilité de *X*.

Solution

L'expérience aléatoire est constituée de deux lancers consécutifs d'une pièce équilibrée.

On peut utiliser un arbre pour déterminer les différentes possibilités (on est dans une situation d'équiprobabilité) et les gains associés : 1



X peut donc prendre les valeurs -5 ; -1 et 3. 2

De plus, d'après l'arbre, on a : 3

- $p(X = -5) = p(\{FF\}) = \frac{1}{4}$
- $p(X = -1) = p(\{PF ; FP\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $p(X = 3) = p(\{PP\}) = \frac{1}{4}$

On en déduit la loi de probabilité de X résumée dans le tableau ci-contre.

x_i	-5	-1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Conseils & Méthodes

1 Si les différentes valeurs prises et les probabilités ne sont pas données, il faut les déterminer en construisant par exemple un arbre ou un tableau pour représenter la situation.

2 Avant de donner la loi de probabilité, on peut récapituler les différentes valeurs que peut prendre la variable aléatoire.

3 On calcule les probabilités $p(X = k)$ pour les différentes valeurs de k données auparavant.

À vous de jouer !

1 On lance un dé équilibré comportant 6 faces. Si la face indique un nombre impair, on perd 3 €, sinon on gagne la valeur en euros du numéro de la face.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le gain algébrique à ce jeu pour modéliser cette situation.

2 On considère une urne comportant des boules de couleur verte, jaune ou bleue et sur lesquelles sont inscrites des motifs (croix ou triangle). Il y a 80 boules dans l'urne dont 10 sont vertes avec des croix. La composition globale de l'urne est donnée par le tableau suivant.

	Verte	Jaune	Bleue	Total
Croix	10	30	12	52
Triangles	10	10	8	28
Total	20	40	20	80

On mise 100 € puis on tire au hasard une boule dans l'urne. On gagne 200 € si c'est une boule verte avec des croix, 150 € si c'est une boule verte avec des triangles, 120 € si c'est une boule bleue avec des croix, et on ne gagne rien dans tous les autres cas.

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y modélisant la situation.

Exercices 21 à 24 p. 308

Exo Versions interactives Lienmini.fr/maths1-22

2 Utiliser les notations du type $\{X = a\}$, $P(X \leqslant a)$

Cours 1 p. 302

On lance successivement une pièce équilibrée cinq fois. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de Pile obtenu sur les cinq lancers.

1. **Décrire par une phrase les événements $\{X = 4\}$ et $\{X \geqslant 3\}$.**

2. **Que signifie $p(X = 0) = 0{,}03125$?**

3. **Sachant que $p(X = 0) = 0{,}03125$ et $p(X = 1) = 0{,}15625$, calculer $p(X \leqslant 1)$.**

4. **Comment peut-on noter la probabilité de faire au moins quatre Pile sur les cinq lancers ?**

Solution

1. $\{X = 4\}$ peut être traduit par la phrase « Il y a eu (exactement) quatre Pile sur les cinq lancers » et $\{X \geqslant 3\}$ par la phrase « Il y a eu au moins trois Pile sur les cinq lancers ». 1

2. $p(X = 0) = 0{,}03125$ signifie que la probabilité d'obtenir 0 Pile sur les cinq lancers est égale à 0,03125.

3. $p(X \leqslant 1)$ est la probabilité de faire au plus un Pile.

On a : $p(X \leqslant 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = 0{,}03125 + 0{,}15625$
$= 0{,}1875$. 2 3

4. La probabilité de faire au moins quatre Pile sur les cinq lancers peut être notée $p(X \geqslant 4)$.

Conseils & Méthodes

1 On met en lien l'énoncé, les valeurs que peut prendre la variable aléatoire et les symboles utilisés (=, <, >, …) pour traduire par une phrase.

2 On additionne les probabilités de faire 0 ou 1 Pile pour obtenir le résultat.

3 La probabilité $p(X \leqslant 1)$ est égale à la probabilité $p(X < 2)$.

À vous de jouer !

3 Soit un jeu de hasard dont le gain peut être égal à 2, 20, 100, 200 ou 1 000 €. Les probabilités d'obtention de chacun des gains sont égales.
On peut modéliser la situation avec une variable aléatoire X associant un gain à chaque issue du jeu.
1. Décrire par une phrase les événements $\{X = 20\}$ et $\{X \leqslant 50\}$.
2. Que vaut $p(X \leqslant 50)$?
3. Comment peut-on noter la probabilité de gagner au moins 100 € ?

4 On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

x_i	−8	0	7	8	20
$P(X = x_i)$	0,4	0,12	0,3	…	0,08

1. Que vaut $p(X = 8)$?
2. Calculer $p(X \leqslant 0)$.
3. Calculer $p(X > 7)$.

5 Une usine fabrique des pièces métalliques pour l'industrie automobile. Elles sont livrées en général par lot de 100 pièces.
On considère la variable aléatoire Y associant le nombre de pièces défectueuses à un lot de 100 pièces.
1. Décrire par une phrase :
a) l'évènement $\{Y = 9\}$. **b)** l'événement $\{Y < 5\}$.
2. Que signifient $p(Y > 2)$ et $p(Y = 0)$?

6 À l'issue d'une chaîne de fabrication de jouets en bois, on recherche deux types de défauts : les défauts de solidité et les défauts de couleur.
Une étude a permis de relever les résultats suivants sur un échantillon de 1 000 jouets :

	Défaut de couleur	Pas de défaut de couleur	Total
Défaut de solidité	5	28	33
Pas de défaut de solidité	15	952	967
Total	20	980	1 000

À réparer, un défaut de couleur coûte 5 € par jouet et un défaut de solidité coûte 12 € par jouet.
X est la variable aléatoire donnant le coût de réparation d'un objet avant d'être mis sur le marché.
1. Quelle valeur peut prendre X ?
2. Décrire par une phrase l'événement $\{X \leqslant 10\}$.
3. Que vaut $p(X = 12)$?

Exercices 26 à 30 p. 309

Exercices résolus

3 Calculer et utiliser une espérance

Cours 2 p. 303

Un jeu de grattage permet de gagner jusqu'à 5 000 €. Le ticket du jeu est vendu 2 €.
On note X la variable aléatoire donnant le gain (en tenant compte de la mise) lorsque l'on choisit au hasard un ticket.
La loi de probabilité de X est donnée par :

x_i	−2	8	98	4 998
$p(X = x_i)$	0,85	0,149 9	0,000 09	0,000 01

Ce jeu est-il équitable ?

Solution

Pour répondre à cette question, il faut calculer l'espérance de la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu. 1
D'après le cours, la formule est :
$E(X) = -2 \times 0{,}85 + 8 \times 0{,}1499 + 98 \times 0{,}00009 + 4998 \times 0{,}00001 \approx -0{,}442$. 2
Cela signifie donc que, si on répète ce jeu en grattant un grand nombre de tickets, on peut « espérer » perdre en moyenne 0,442 € (par ticket gratté).
L'espérance n'étant pas nulle, ce jeu n'est pas équitable.

Conseils & Méthodes

1 Un jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$.

2 On peut utiliser la calculatrice pour obtenir l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire (voir le TP1).

À vous de jouer !

7 Une urne contient 4 tickets numérotés 0 ; 1 ; 10 et 20. Un joueur mise 4 € puis tire au hasard un ticket qui lui indique le montant qu'il gagne.
Quel gain moyen peut-il espérer s'il joue un grand nombre de fois à ce jeu ?

8 On mise 3 € puis on lance trois fois de suite une pièce équilibrée.
On gagne 2 € par Pile obtenu.
Ce jeu est-il équitable ?

Exercices 31 à 33 p. 309

4 Obtenir une simulation avec Python

Algo & Prog — Cours 2 p. 304

On considère le programme ci-contre permettant d'obtenir au hasard une valeur prise par une variable aléatoire X.
1. Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?
2. Que vaut $p(X = 0)$?

```
import random
alea=random.random()
if alea <= 0.50:
    print("-2")
if alea > 0.50 and alea<=0.75:
    print("0")
if alea >0.75:
    print("4")
```

Solution

1. X peut prendre les valeurs −2 ; 0 ou 4. 1
2. Pour afficher 0, alea doit être compris entre 0,50 et 0,75.
Alors $p(X = 0) = 0{,}25$. 2

Conseils & Méthodes

1 Ce sont les affichages possibles du programme.

2 alea est un nombre compris entre 0 et 1.
La probabilité qu'il soit compris entre 0,50 et 0,75 vaut 0,75 − 0,50 = 0,25.

À vous de jouer !

9 Écrire un programme **Python** permettant d'afficher une valeur prise par la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

x_i	−8	15
$p(X = x_i)$	0,58	0,42

10 On considère le programme **Python** ci-contre permettant de faire une simulation avec une variable aléatoire Y.

```
import random
alea=random.random()
if alea <= 0.18:
    print("20")
else:
    print("-5")
```

Que vaut $p(Y = -5)$?

Exercices 37 à 40 p. 310