Activités

20 min

1 Découvrir la notion de variable aléatoire

Flo propose à Léna le jeu suivant pour une mise de départ de 2 €.

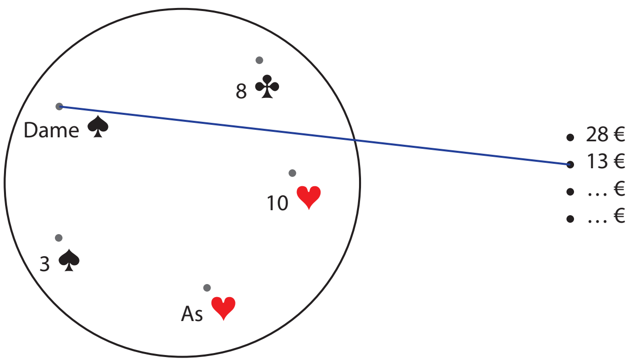
Léna tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes puis :

- si elle tire un as, elle gagne 30 € ;
- si elle tire un roi ou une dame, elle gagne 15 € ;
- si elle tire un 2, un 3 ou un 4, elle gagne 4 € ;
- si elle tire une autre carte, elle ne gagne rien.

Rappel Un jeu de 52 cartes est composé de 4 « couleurs » (trèfle, pique, coeur et carreau) et pour chacune de celles-ci il y a 13 valeurs (2, 3, 4, … , 10, valet, dame, roi et as).

1. Déterminer les gains algébriques potentiels de Léna à ce jeu (en tenant compte de la mise de départ, positif si elle gagne de l'argent, négatif sinon).

2. Recopier et compléter le schéma ci-dessous en joignant les éléments.
Prendre exemple sur ce qui a déjà été tracé :



3. On note X la fonction qui, à chaque issue du tirage au hasard d'une carte, associe le gain algébrique de Léna. On dit que X est une variable aléatoire réelle.
Quelles sont les valeurs de *X*({*6decœur*}) et *X*({*roidetrefle*}) ?

4. On note $p(X = 28)$, ce qui se lit « probabilité que X soit égale à 28 », la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 28. Elle est égale à la probabilité de tirer au hasard un as.

a) Que vaut $p(X = 28)$?

b) Que vaut $p(X = 13)$?

5. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Gains : x_i	28	13	…	…
Probabilités : $p(X = x_i)$	…	…	…	…

En construisant ce tableau, nous définissons la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

6. Quelle est la probabilité (en tenant compte de la mise) :

a) que Léna perde de l'argent ?

b) qu'elle gagne plus de 10 € ?

c) qu'elle gagne 4 € ?

d) qu'elle gagne 2 € ?

↪ Cours 1 p. 302

15 min

2 Utiliser des notations

Une urne contient 50 tickets numérotés et sa composition est donnée dans le tableau suivant.

Numéro	10	15	20	22	30	31	40	50
Nombre de tickets	2	14	8	4	7	8	4	3

On tire au hasard un ticket. On note X la variable aléatoire donnant le numéro du ticket tiré.

1. Quelles valeurs peut prendre X ?

2. On note $\{X \leqslant 25\}$ l'évènement « La variable aléatoire prend une valeur inférieure ou égale à 25 ».

a) Compléter par les éléments que peut prendre X dans ce cas : l'événement $\{X \leqslant 25\}$ est réalisé si et seulement si X prend sa (ses) valeurs dans $\{10 ; 15 ; \ldots\}$.

b) Compléter la phrase suivante traduisant dans le contexte de l'exercice l'événement $\{X \leqslant 25\}$: « Le numéro du ticket tiré est… ».

3. Reprendre les questions **2. a)** et **b)** pour les événements suivants.

a) $\{X < 31\}$ **b)** $\{X \geqslant 22\}$ **c)** $\{X = 15\}$

4. On note $p(X \leqslant 15)$ la probabilité de l'événement $\{X \leqslant 15\}$, c'est-à-dire la probabilité que le numéro du ticket tiré soit inférieur ou égal à 15. Déterminer $p(X \leqslant 15)$.

5. Calculer : **a)** $p(X = 15)$ **b)** $p(X < 31)$ **c)** $p(X \geqslant 22)$

↪ Cours 1 p. 302

TICE

30 min

3 Découvrir la notion d'espérance

Anouk propose le jeu suivant : on mise 1 €, on lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6, puis on gagne une somme égale à la différence entre les deux dés (le plus grand résultat auquel on soustrait le plus petit). Par exemple, en tenant compte de la mise de départ, si les dés tombent sur 6 et 3, on gagne 6 – 3 – 1 = 2 €.

Reyanne souhaite étudier la situation, et notamment le gain moyen qu'elle peut espérer à ce jeu. Pour cela, elle établit une simulation du jeu sur tableur.

	A	B	C
1	Gain moyen sur 1 000 simulations		
2	0,939		
3			
4	Dé 1	Dé 2	Gain
5	4	3	0
6	2	2	-1
7	1	5	3
8	4	5	0
9	1	6	4
10	3	5	1
11	4	1	2
12	5	3	1
13	2	1	0

1. Obtenir à l'aide du tableur une simulation similaire. On établira un échantillon de 1 000 simulations et on pourra utiliser les fonctions suivantes du tableur (à modifier suivant ce qu'il faut calculer) :

- `=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)` affiche aléatoirement un nombre entier entre 1 et 6 ;
- `=MIN(A5:B5)` détermine le minimum des valeurs dans la plage de données des cellules A5 à B5. On a de même la fonction MAX ;
- `=MOYENNE(A2:A101)` calcule la moyenne des nombres situés dans la plage de données A2:A101.

2. En utilisant la simulation, donner une approximation du gain qu'elle peut espérer en moyenne à ce jeu.

3. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique pour chaque lancer de dé à ce jeu. Déterminer la loi de probabilité de X.

4. On appelle espérance de X le nombre réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \ldots + x_n \times P(X = x_n)$$

où $x_1, x_2, ..., x_n$ sont toutes les valeurs que peut prendre X.
Calculer $E(X)$.

5. Comparer ce résultat au gain moyen sur 1 000 parties que Reyanne avait obtenu sur tableur.

↪ Cours 2 p. 303

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

11 Quelle est, d'après-vous, la formule la plus importante de ce chapitre ?

12 *On répondra à cet exercice en fin de chapitre.*
Chercher dans le chapitre précédent les résultats et méthodes dont vous avez eu besoin dans ce chapitre.

Questions – Flash

Diapo Diaporama Ressource professeur

13 On lance trois fois successivement un dé tétraédrique équilibré dont les 4 faces sont numérotées de 1 à 4. On additionne les numéros de chacun des résultats obtenus.
Y est la variable aléatoire associant cette somme à une expérience de trois lancers du dé.
Quelle(s) valeur(s) peut prendre Y ?

14 Une urne contient trois boules jaunes et cinq boules rouges. On tire au hasard et avec remise deux boules. On gagne 3 € par boule jaune tirée et on perd 1 € par boule rouge tirée.
X est la variable associant le gain à un tirage.
Quelle(s) valeur(s) peut prendre X ?

15 X est une variable aléatoire pouvant prendre comme valeurs les nombres entiers entre 0 et 20.
a) Noter de manière plus simple X prend une valeur dans $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
b) Donner une notation de la probabilité d'obtenir un résultat supérieur à 14.

16 X est une variable aléatoire discrète prenant des valeurs entre 0 et 100 et telle que $p(X \leqslant 12) = 0{,}23$.
Que vaut $p(X > 12)$?

17 Pour cet exercice, on convient que la commande `Alea()` renvoie un nombre réel aléatoire entre 0 et 1.
Une variable aléatoire X a été simulée avec l'algorithme suivant.

```
aleatoire←alea()
si aleatoire <= 0.2
    Afficher "0"
Fin si
si aleatoire <= 0.65 et aleatoire>0.2
    Afficher "8"
Fin si
si aleatoire>0.65
    Afficher "20"
Fin si
```

Donner $p(X = 8)$.

Pour les exercices 18 à 20, X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	0	2	5	10
$p(X = x_i)$	0,1	0,2	0,3	…

18 Quelle est la valeur manquante dans ce tableau ?

19 Déterminer $p(X \leqslant 5)$.

20 Calculer $E(X)$.

Déterminer une loi de probabilité

21 Une urne contient trente boules numérotées de 1 à 30. On tire au hasard une boule.
Si le numéro de la boule est compris entre 1 et 15, on gagne 2 €, s'il est compris entre 16 et 27, on gagne 10 €.
Sinon on gagne 50 €.
On note X la variable aléatoire donnant le gain à chaque boule tirée au sort.
1. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?
2. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

x_i	2	…	…
$p(X = x_i)$	…	…	…

22 Dans une entreprise, il y a 500 employés. SES
Le tableau de répartition des salaires est le suivant.

Salaire en euro	1 600	2 000	2 500	3 000
Nombre de personnes	300	150	45	5

On note Y la variable aléatoire donnant le salaire perçu par un employé tiré au sort dans l'entreprise.
1. Quelles sont les valeurs possibles prises par Y ?
2. Dresser un tableau donnant la loi de probabilité de Y.

23 Mathieu propose le jeu suivant avec une pièce truquée (on estime que la pièce a 38 % de chance de tomber sur Pile).
On mise 20 €, puis on lance la pièce deux fois successivement.
On gagne 25 € par Pile obtenu sur les deux lancers.
1. Calculer la probabilité de gagner 30 € à ce jeu en tenant compte de la mise.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le gain à ce jeu (en tenant compte de la mise).

24 Carla a écrit chacun des mots *Rien ne sert de courir, il faut partir à point* (morale d'une fable de Jean de la Fontaine) sur des cartons qu'elle met dans une urne.
Elle tire au hasard un carton.
On considère la variable aléatoire N qui associe à chaque issue le nombre de lettres du mot écrit sur le carton.
Déterminer la loi de probabilité de N.

25 On lance deux dés équilibrés à 4 faces numérotées de 1 à 4.
On note X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la valeur du plus grand numéro obtenu sur les deux dés.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Utiliser les notations d'évènements et de probabilités

26 Une variable aléatoire peut prendre les valeurs – 120 ; 0 ; 150 ; 300 et 1000. Définir par une phrase et donner les issues possibles des évènements suivants.
a) $\{X = 150\}$ **b)** $\{X = 10\}$ **c)** $\{X > 100\}$
d) $\{X > 300\}$ **e)** $\{X \geqslant 300\}$ **f)** $\{X \leqslant 0\}$

27 On lance 15 fois de suite un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de « 6 » obtenu sur les 15 lancers.
Utiliser une notation pour écrire les probabilités des événements suivants :
a) Le dé est tombé cinq fois sur « 6 ».
b) Le dé est tombé au moins une fois sur « 6 ».
c) Le dé est tombé au plus trois fois sur « 6 ».
d) Le dé est tombé plus de dix fois sur « 6 ».

28 La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	0	2	3	5	7
$p(X = x_i)$	0,1	0,15	0,16	0,45	0,14

Déterminer les probabilités suivantes :
a) $p(X = 5)$ **b)** $p(X \leqslant 5)$ **c)** $p(X > 5)$
d) $p(X \geqslant 2)$ **e)** $p(X = 0)$ **f)** $p(0 < X < 5)$

29 Une variable aléatoire X prend des valeurs entières entre 0 et 50.
1. Quel est le contraire de l'événement $\{X > 4\}$?
2. Sachant que $p(X > 6) = 0,87$, déterminer $p(X \leqslant 6)$.
3. Sachant que $p(X = 0) = 0,03$, quelle est la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur supérieure ou égale à 1 ?

30 X est une variable aléatoire prenant les valeurs – 1 ; 0 et 1 telle que : $p(X = 1) = p(X = 0)$ et $p(X = -1) = 3 \times p(X = 1)$.
1. Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de X.
2. Calculer $p(X \geqslant 0)$.

Calculer et utiliser une espérance

31 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	– 2	1	11
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

1. En utilisant la définition du cours, calculer l'espérance de X.
2. Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

32 On considère un jeu de hasard. La variable aléatoire X donnant le gain (mise comprise) a une loi de probabilité résumée dans le tableau ci-dessous.

x_i	– 5	– 2	0	50
$p(X = x_i)$	0,4	0,3	0,28	0,02

1. En utilisant la définition du cours, calculer $E(X)$.
2. Interpréter ce résultat.
3. Ce jeu est-il équitable ?

33 X est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs – 3 ; 4 ; 10 et 30. Son espérance est égale à 5. On considère les variables Y et Z telles que $Y = 3X$ et $Z = X + 10$.
1. Déterminer les valeurs que peuvent prendre Y et Z.
2. Déterminer $E(Y)$ et $E(Z)$.

Calculer des indicateurs

34 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	– 2	4	6
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

1. En utilisant la définition du cours, calculer l'espérance de X.
2. En utilisant les définitions du cours, calculer la variance de X et en déduire l'écart-type de X.
3. Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

35 Pour chacune des variables aléatoires suivantes dont on donne la loi de probabilité à l'aide d'un tableau, déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type (si besoin on arrondira les résultats à 0,01 près).

1.

x_i	– 4	0	9	25
$p(X = x_i)$	0,50	0,20	0,20	0,10

2.

y_i	– 25	– 3	5	100
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0,3	0,2

3.

z_i	– 5	0	4	10
$p(Z = z_i)$	0,42	0,38	0,15	0,05

36 Les lois de probabilités de deux variables aléatoires X et Y sont données dans les tableaux ci-dessous.

x_i	– 8	0	8	20
$p(X = x_i)$	0,25	0,25	0,25	0,25

y_i	– 20	– 12	– 2	10	15
$p(Y = y_i)$	0,1	0,1	0,15	0,25	0,4

1. Comparer $E(X)$ et $E(Y)$.
2. Comparer $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.

Simuler une variable aléatoire

Algo & Prog

Dans cette partie, on considère que :
- la fonction `Alea()` renvoie un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 ;
- pour tous les programmes Python, le module random est importé et la commande `random.random()` renvoie un nombre réel aléatoire entre 0 et 1.

37 Y est une variable aléatoire donnant un gain à un jeu. Sa loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous.

y_i	0	5	20
$p(Y = y_i)$	0,80	0,12	0,08

On souhaite construire une simulation de la variable aléatoire Y.

1. Recopier et compléter le tableau suivant donnant un découpage de [0 ; 1] permettant de satisfaire aux probabilités.

y_i	0	5	20
Bornes pour alea()	entre 0 et ... inclus	entre ... exclu et 0,92 inclus	entre 0,92 exclu et 1

2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous permettant d'obtenir une valeur prise par la variable aléatoire Y.

```
aleat←alea()
si aleat <= 0.8
    Afficher "..."
Fin si
si aleat <= ... et aleat>...
    Afficher "5"
Fin si
si aleat>...
    Afficher "..."
Fin si
```

38 Juliette veut programmer un jeu de hasard dont les gains et leurs probabilités sont donnés dans le tableau ci-contre.

Gain	−5	1	10
Probabilité	0,56	0,27	0,17

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour aider Juliette à programmer son jeu.

```
aleatoire←alea()
si aleatoire <= ...
    Afficher "-5"
Fin si
si aleatoire > ... et aleatoire<=...
    Afficher "1"
Fin si
si aleatoire> ...
    Afficher "..."
Fin si
```

2. Écrire le programme **Python** de cet algorithme.

39 Une valeur prise par une variable aléatoire X est obtenue avec l'algorithme suivant.

```
a←alea()
si a <= 0.15
    Afficher "-4"
Fin si
si a <= 0.30 et a>0.15
    Afficher "0"
Fin si
si a <= 0.60 et a>0.30
    Afficher "2"
Fin si
si a>0.60
    Afficher "15"
Fin si
```

1. Donner $p(X = 2)$.

2. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

x_i	−4	0	2	15
$p(X = x_i)$	...	...	...	...

40 Une valeur prise par une variable aléatoire X est obtenue avec le programme suivant.

```python
alea=random.random()
if alea <= 0.72:
    print("-8")
if alea <= 0.95 and alea > 0.72:
    print("50")
if alea > 0.95:
    print("80")
```

Donner la loi de probabilité de X.

Calculs et automatismes

41 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Si $p(X < 9) = 0,56$, que vaut $p(X \geqslant 9)$?

2. Si $p(X < 9) = 0,56$ et $p(X = 9) = 0,05$, que vaut $p(X \leqslant 9)$?

3. Si $p(X \leqslant 10) = 0,74$ et $p(X = 10) = 0,12$, que vaut $p(X < 10)$?

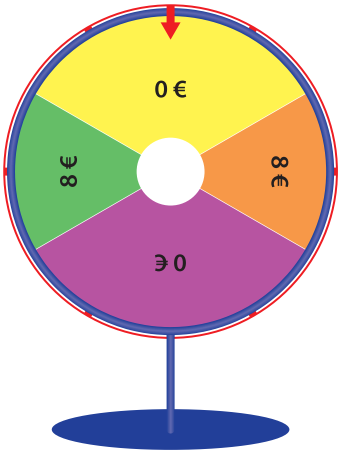
42 Sans calculatrice, calculer l'espérance de la variable aléatoire X dans le cas suivant.

x_i	−4	2	5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Loi de probabilité et calcul

43 Dans une fête on propose à Léonard de miser 5 € puis de tourner deux fois une roue. Il gagne les sommes indiquées à chacun des deux tours de roues.

Les secteurs « 0 € » ont pour angle 120°, les secteurs « 8 € » ont pour angle 60° et la probabilité de tomber sur un secteur est proportionnelle à l'angle formé par ce secteur.



1. Modéliser cette situation à l'aide d'une variable aléatoire X donnant le gain algébrique de Léonard.

2. Quelle est la probabilité que Léonard gagne de l'argent ?

44 X est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs entières de 0 à 5 (inclus).

On sait que :

- $p(X = 0) = 0{,}25$
- $p(X \leqslant 1) = 0{,}35$
- $p(X = 2) = p(X \leqslant 1)$
- $p(X = 5) = p(X = 4)$
- $p(X = 3) = 4 \times p(X = 4)$

Donner la loi de probabilité de X.

45 Pour traverser le couloir du troisième étage du lycée, Miguel met cinq minutes.

Il sait que si, lors de cette traversée, il rencontre un ami, il parlera avec lui deux minutes.

Il y a deux salles devant lesquelles il peut retrouver un ami et la probabilité qu'il en rencontre un devant une salle est 0,3. Ces rencontres sont indépendantes.

X est la variable aléatoire donnant le temps de traversée du couloir en minute.

Déterminer la loi de probabilité de X.

46 Une entreprise fabrique des fioles en verre de contenance théorique 250 mL.

Un technicien du contrôle de qualité effectue une analyse d'un échantillon de 200 fioles. Voici les relevés des contenances de ces fioles.

Contenance (en mL)	248	249	250	251	252
Effectifs	3	17	174	4	2

Le technicien prend au hasard une fiole dans cet échantillon. On note X la variable aléatoire donnant la contenance d'une fiole choisie dans l'échantillon.

1. Que vaut $p(X = 252)$?

2. Déterminer la probabilité que la fiole choisie ait une contenance inférieure ou égale à 250 mL.

47 Une urne contient n (n entier supérieur ou égal à 10) boules indiscernables au toucher dont cinq sont rouges, deux sont vertes et les autres sont jaunes.

On tire au hasard une boule dans l'urne. Si celle-ci est verte, on gagne 3 €, si elle est jaune on gagne 5 €, sinon on perd 2 €.

X est la variable aléatoire associant le gain algébrique au jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de X (les probabilités seront écrites en fonction de n).

2. Comment faut-il choisir n pour que la probabilité de gagner de l'argent à ce jeu soit supérieure ou égale à 0,6 ?

48 Une association propose à tous ses membres des stages de découverte ou de perfectionnement de la pratique de certains sports. Les tarifs en euros de ces stages sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Judo	Danse hip-hop	Handball
Adultes	26	15	20
Jeunes	20	15	13

48 adultes se sont inscrits dont la moitié ont choisi le judo et 8 la danse hip-hop.

108 jeunes se sont inscrits dont un tiers ont choisi la danse hip-hop et 40 ont choisi le handball.

Le président de l'association tire au hasard la fiche de l'une des personnes inscrites. On note X la variable aléatoire donnant le tarif payé en euros par la personne.

1. Calculer $p(X = 13)$ et $p(X \geqslant 20)$.

2. Déterminer la loi de probabilité de X.

Indicateurs d'une variable aléatoire et problèmes

49 Une roue est partagée en 10 secteurs angulaires égaux dont 5 sont colorés en rouge, 3 en vert et 2 en jaune.

On tourne la roue et elle s'arrête au hasard sur un secteur angulaire. Si celui-ci est vert, on gagne 5 €, s'il est jaune on gagne 20 € et s'il est rouge on perd 4 €.

X est la variable aléatoire donnant le gain (algébrique) de ce jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ à l'aide des formules du cours.

3. Interpréter la valeur de $E(X)$.

4. Vérifier les résultats de la question **2.** en utilisant la calculatrice.

50 Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher dont 15 sont rouges et les autres sont jaunes.

On mise 40 €. On tire au hasard successivement deux boules en remettant dans l'urne la première. On gagne 70 € par boule jaune tirée.

X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique de ce jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. À l'aide de la calculatrice, calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

3. Donner une interprétation de $E(X)$.

4. Ce jeu est-il équitable ?

Exercices d'entraînement

51 Amina mise 3 € puis lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Elle gagne une valeur en euros égale au double du numéro affiché par le dé.
Quel montant peut-elle espérer gagner (ou perdre) en moyenne si elle joue un grand nombre de parties à ce jeu ?

52 Quand il fait du vélo pour rentrer du lycée, William peut prendre deux itinéraires possibles. La probabilité qu'il choisisse le trajet A, le long du parc, est de $\frac{1}{3}$. S'il choisit ce trajet, le temps de parcours peut être de 10 minutes avec une probabilité de $\frac{1}{5}$ ou de 13 minutes suivant les feux de priorité.
S'il choisit le trajet B, le long de la grande route, son trajet peut être de 8 minutes avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, de 9 minutes avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ ou de 10 minutes.
1. Construire un arbre pondéré résumant la situation.
2. Donner la loi de probabilité de T, la variable aléatoire donnant le temps de trajet de William en minute.
3. Calculer $E(T)$. Interpréter ce résultat.

53 Une urne contient 40 tickets numérotés de 1 à 40. On mise 5 € puis on tire au hasard, successivement et avec remise, deux tickets de l'urne.
Pour chaque ticket dont le numéro est inférieur ou égal à 12, on gagne 8 €.
Quel est le gain algébrique que l'on peut espérer à ce jeu sur 1 000 parties ?

↪ **Pour des cas sans remise, Exercices 87 et 88 p. 316**

54 Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur de m dans le tableau de sorte que l'espérance de X soit nulle.

a)

x_i	5	3	1	m
$p(X = x_i)$	0,2	0,2	0,4	0,2

b)

x_i	$-m$	$10 - m$	$50 - m$	$100 - m$	$1000 - m$
$p(X = x_i)$	0,30	0,30	0,2	0,15	0,05

55 Lorsqu'elle joue aux fléchettes, Constance sait qu'elle a 20 % de chance de toucher le « triple-vingt » et 45 % de chance de toucher le « simple-vingt ».
On lui propose le jeu suivant : Constance mise m €. Si elle touche le « simple-vingt », on lui rembourse sa mise ; si elle touche le « triple-vingt » on lui donne le triple de sa mise.
Déterminer, en fonction de m, le montant qu'elle peut espérer gagner en moyenne si elle effectue un grand nombre de parties.

56 On reprend les données de l'exercice précédent.
On propose maintenant à Constance la situation suivante : elle mise 5 € puis lance deux fois successivement une fléchette. On suppose les lancers indépendants. Si elle fait deux « triple-vingt », elle gagne a € ;
si elle n'en fait qu'un seul sur les deux lancers, elle gagne 10 €. Sinon elle perd sa mise.
Quelles sont les valeurs de a possibles pour que Constance gagne de l'argent en moyenne à ce jeu ?

57 Un jeu consiste à lancer deux dés tétraédriques dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Après le lancer, on fait la somme des numéros des faces. La mise de départ est m € (m étant un nombre réel positif). Puis :
- on gagne 10 € si on obtient un résultat supérieur ou égal à 6 ;
- on gagne 20 € si on obtient un résultat inférieur à 4 ;
- on ne gagne rien sinon.

1. Pour cette question, on prend $m = 5$.
X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique du jeu.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Déterminer $E(X)$.
c) Ce jeu est-il à l'avantage du joueur ou de l'organisateur ?
2. Pour quelle valeur de m le jeu est-il équitable ?

58 Proposer un jeu dont le gain algébrique moyen est de – 10 € et dont le gain maximal est 100 €.

59 SES Une entreprise fabrique des capteurs électroniques. À la fin de la fabrication, trois cas peuvent se présenter : le capteur n'a pas de défaut, le capteur a un défaut de fonctionnement ou le capteur a un défaut de taille.
Une étude de qualité a permis d'obtenir les résultats suivants :

	Pas de défaut	Défaut de fonctionnement	Défaut de taille
Nombre de capteurs	190	7	3

- On tire au hasard un capteur dans la production et on regarde s'il a un défaut. On suppose que l'analyse de l'échantillon de 200 capteurs fournit une estimation des probabilités de l'état du capteur.
- Il n'y a donc pas de capteurs ayant les deux défauts.

Un capteur n'ayant pas de défaut coûte 10 € à l'entreprise.
Les réparations suite à un défaut constaté font augmenter le coût de production de 4 € pour un capteur ayant un défaut de fonctionnement et de 6 € pour un capteur ayant un défaut de taille.
X est la variable aléatoire donnant le coût total d'un capteur tiré au hasard.
1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Si on fabrique un grand nombre de capteur, quel est le coût moyen d'un capteur ?
3. L'entreprise souhaite fabriquer un million de capteurs. Donner une estimation du coût de fabrication.

60 La roulette du casino comporte 37 cases numérotées de 0 à 36. Pour les nombres entiers de 1 à 36, on sait que 18 nombres sont situés sur des cases rouges, les autres étant sur des cases noires.
Le 0 est sur une case verte à l'avantage du casino.
1. Tom mise 10 € sur son numéro fétiche entre 1 et 36. Si la bille s'arrête sur son numéro, il remporte 36 fois sa mise, sinon il perd sa mise.
a) Modéliser cette situation par une variable aléatoire X donnant le gain algébrique à ce jeu.
b) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$. Interpréter ces résultats.
2. Hélène mise 10 € sur la couleur rouge.
Si la bille s'arrête sur une case rouge, elle remporte 2 fois sa mise, sinon elle perd sa mise.
a) Modéliser cette situation par une variable aléatoire Y donnant le gain algébrique à ce jeu.
b) Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$. Interpréter ces résultats.
3. Doit-on conseiller à Tom et Hélène de jouer un grand nombre de parties ?
4. Léo veut jouer une seule partie.
Que peut-on lui conseiller ?

61 Un commerçant spécialisé en photographie numérique propose en promotion un modèle d'appareil photo numérique et un modèle de carte mémoire compatible avec cet appareil.
Il a constaté, lors d'une précédente promotion, que :
• 20 % des clients achètent l'appareil photo en promotion ;
• 70 % des clients qui achètent l'appareil photo en promotion achètent la carte mémoire en promotion ;
• 60 % des clients n'achètent ni l'appareil photo en promotion, ni la carte mémoire en promotion.
On suppose qu'un client achète au plus un appareil photo en promotion et au plus une carte mémoire en promotion.
1. Un client entre dans le magasin.
On note A l'événement : le client achète l'appareil photo en promotion.
On note C l'événement : le client achète la carte mémoire en promotion.
a) Donner les probabilités $p(\overline{A})$ et $p(\overline{A} \cap \overline{C})$.
b) Le client n'achète pas l'appareil photo en promotion. Calculer la probabilité qu'il n'achète pas non plus la carte mémoire en promotion.
2. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
3. Le commerçant fait un bénéfice de 30 € sur chaque appareil photo en promotion et un bénéfice de 4 € sur chaque carte mémoire en promotion.
a) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité du bénéfice par client.

Bénéfice par client en euros	0	...	...	...
Probabilité d'atteindre le bénéfice	0,6	...	...	...

b) Pour 100 clients entrant dans son magasin, quel bénéfice le commerçant peut-il espérer tirer de sa promotion ?

62 On propose à Ruben les deux tombolas suivantes qui ont lieu tous les week-end :
• La tombola A où le ticket coûte 5 €. Il y a 500 tickets dont 5 permettent de gagner 200 €, 10 permettent de gagner 100 € et les autres tickets sont perdants ;
• La tombola B où le ticket coûte 2 €. Il y a 800 tickets dont 2 permettent de gagner 250 €, 40 permettent de gagner 10 € et les autres tickets sont perdants.
1. Modéliser ces deux tombolas par des variables aléatoires X et Y donnant les gains (en tenant compte de la mise).
2. Calculer les espérances et écarts-type de X et Y.
3. Comparer ces deux tombolas.

Propriétés de l'espérance

63 Lors d'une fête, une association propose un jeu dont les gains en jetons peuvent être modélisés par une variable aléatoire X. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	-1	3	5	10
$p(X = x_i)$	0,5	0,32	0,16	0,02

1. Montrer que $E(X)$ est positif.
2. Comme il y a suffisamment de jetons, l'association décide finalement de doubler tous les gains. On appelle Y la variable aléatoire associant les nouveaux gains à chaque issue.
a) Quelles valeurs peut prendre Y ?
b) Donner la loi de probabilité de Y.
c) Que vaut $E(Y)$?

64 Y est une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs -4 ; 5 ; 10 et 100, et telle que $E(Y) = 8$.
1. Soit la variable aléatoire Z telle que $Z = 2Y + 50$.
a) Quelles valeurs peut prendre Z ?
b) Déterminer $E(Z)$.
2. Soit la variable aléatoire R telle que $R = -3Y + 5$.
a) Quelles valeurs peut prendre R ?
b) Déterminer $E(R)$.

65 Une entreprise compte 100 employés. Le tableau de répartition des salaires est le suivant.

Salaire en euros	1 550	1 750	2 200	3 000
Nombre de personnes	40	35	24	1

Le directeur prend au hasard le bulletin de salaire de l'un de ses employés.
On note X la variable aléatoire donnant le salaire perçu par un employé tiré au sort.
1. Calculer $E(X)$.
2. Le directeur décide d'augmenter tous les salaires de 10 €. Que devient alors l'espérance ?
3. Finalement, au lieu d'augmenter tous les salaires de 10 €, il les augmente de 2 %. Comment évolue l'espérance ?

66 Un cinéma propose des places à 7 €. Une boisson est vendue 3,20 € et le paquet de pop-corn est vendu 4,30 €.

Le gérant du cinéma a constaté que 65 % des clients ne prennent rien en plus de leur place, que 20 % prennent un paquet de pop-corn dont un cinquième prend aussi une boisson.

1. Quel est le pourcentage des clients achetant une place avec seulement une boisson ?

2. Soit R la variable aléatoire donnant le prix payé par un client du cinéma choisi au hasard.
Déterminer la loi de probabilité de R.

3. Quel chiffre d'affaire journalier peut-il espérer en moyenne pour 2 000 spectateurs ?

4. Le gérant décide d'augmenter le prix de la place de cinéma de 50 centimes. Les prix de la boisson et du pop-corn restent inchangés.
Quel prix payé par un client peut-il espérer en moyenne si un grand nombre de clients se présente ?

67 Les gains algébriques d'un jeu sont modélisés par une variable aléatoire X.
Lorsque l'on augmente tous les gains de a euros, alors on augmente de 20 % l'espérance de X pour obtenir l'espérance de la variable aléatoire modélisant le nouveau jeu (avec les gains augmentés).
Écrire $E(X)$ en fonction de a.

68 Lorsqu'elle se rend à son sport le week-end, Laurène est toujours en retard. Il y a une probabilité égale à 0,6 pour qu'elle arrive avec 5 min de retard, une probabilité égale à $\frac{1}{4}$ pour qu'elle arrive avec 10 min de retard et, le reste du temps, elle est en retard de 15 min.
Soit D la variable aléatoire donnant le temps de retard en minute (arrondi à 5, 10 ou 15 min) de Laurène lorsqu'elle se rend à son sport.

1. Calculer $E(D)$.

2. Pour faire une petite cagnotte, ses amis ont mis en place un système d'amendes : elle devra payer 0,50 € par minute de retard.
Quelle est la somme payée par Laurène que peuvent espérer ses amis en moyenne par week-end ?

3. Finalement, Laurène a changé ses habitudes : la probabilité qu'elle arrive en retard de 5 min devient égale à 0,5 ; la probabilité qu'elle arrive en retard de 10 min devient égale à 0,2. Le reste du temps, elle n'est plus en retard. Ses amis ont envie de changer le montant de l'amende.
Comment choisir le prix en euros de la minute de retard pour que le montant payé en moyenne par Laurène devienne inférieur ou égal à 3 € ?

Variable aléatoire et programmation

Algo & Prog

Dans cette partie, on considère que pour tous les programmes Python, le module `random` est importé et la commande `random.random()` renvoie un nombre réel aléatoire entre 0 et 1.

69 Un jeu est basé sur une simulation informatique. Un joueur mise 5 € et le programme lui indique son gain final qui ne tient pas compte de la mise. Eline a eu accès au programme donné ci-dessous.

```python
m=random.random()
if m <= 0.60:
    print("0")
if m <= 0.86 and m > 0.60:
    print("12")
if m > 0.86:
    print("20")
```

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X associant le gain algébrique à chaque expérience du jeu.

2. Peut-on espérer gagner de l'argent à ce jeu si on joue un grand nombre de parties ?

70 Est-il intéressant pour un joueur de participer au jeu informatique dont le programme est donné ci-dessous ?

```python
alea=random.random()
if alea <= 0.50:
  print("Vous avez perdu 10 jetons.")
if alea >0.5 and alea <=0.8:
  print("Vous avez gagné 2 jetons.")
if alea > 0.8 and alea <= 0.91:
  print("Vous avez gagné 4 jetons.")
if alea > 0.91:
  print("Vous avez gagné 8 jetons.")
```

71 Un lycée compte 1 000 élèves suivant la répartition d'âge suivante :

Âge	14	15	16	17	18	19
Effectif	26	232	259	227	216	40

On choisit au hasard un élève dans ce lycée et on lui demande son âge.

1. Écrire une fonction `age_aleatoire()` qui simule cette expérience aléatoire.

2. On écrit dans la console la commande

`echantillon=[age_aleatoire() for i in range(10)]`.

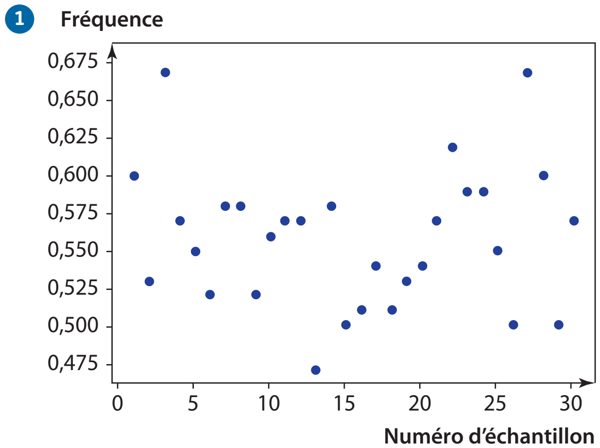
Que permet de faire cette instruction ?

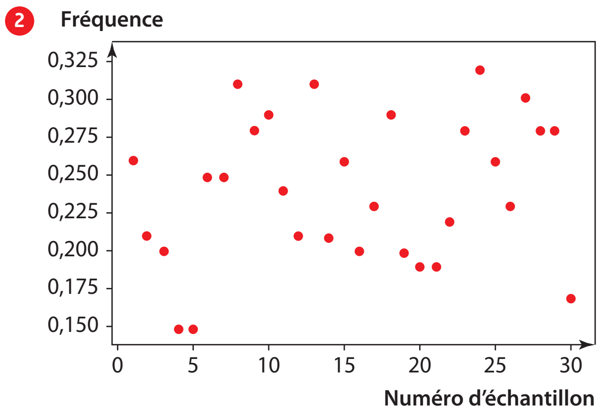
72 Un jeu de hasard est donné par la fonction ci-dessous.

```python
def jeu():
    a=random.random()
    if a <= 0.452:
        resultat=-12
    else:
        resultat=16
    return resultat
```

1. Donner un programme ou une commande permettant de créer une liste représentant un échantillon d'issues de ce jeu de taille 100.

2. On a simulé 30 échantillons de taille 1 000 de ce jeu et on a représenté dans un graphique les fréquences de gagner 16 points pour chacun de ces échantillons.
Parmi les deux graphiques ci-dessous, un seul représente celui qui a été obtenu. Lequel ? Expliquer.





73 Assan vend des contrats d'assurance. Chaque jour, il estime à 40 % la probabilité qu'il ne vende aucun contrat, 10 % celle qu'il en vende un, 35 % celle qu'il en vende deux, 8 % celle qu'il en vende trois, et le reste celle qu'il en vende quatre.

1. Écrire un programme simulant la variable aléatoire modélisant cette situation.

2. Sachant qu'un contrat rapporte 45 €, combien peut-il espérer gagner d'argent (lié au contrat) en moyenne par jour sur un an sachant qu'il travaille 220 jours par an ?

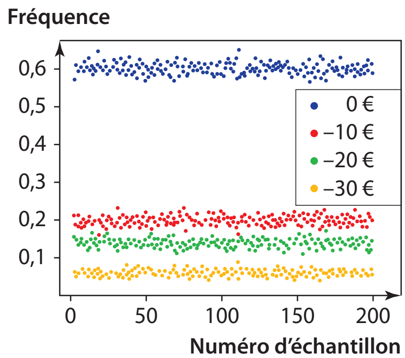
74 Un magasin de bricolage fait l'annonce suivante : **Problème ouvert**

> Pour **100 €** d'achat, jouez avec nous :
> votre facture peut baisser de **10**, **20** ou **30 €** en tournant la Roue de la Chance !

Il y a 20 % de chance de faire baisser la facture de 10 €, 14 % de chance de la faire baisser de 20 € et 6 % de la faire baisser de 30 €.

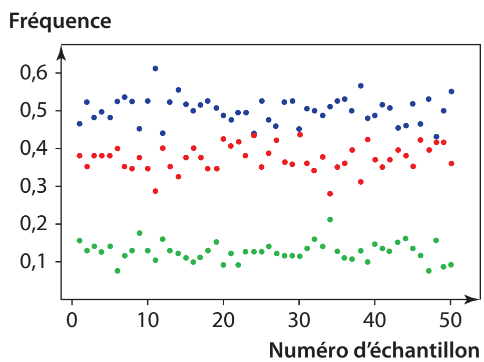
1. En supposant que l'affirmation du magasin est vraie, quelle est la baisse que peut espérer un client en moyenne s'il compte venir souvent faire ses achats (d'un montant supérieur à 100 €) ?

2. Luis a simulé 200 échantillons des baisses pour 1 000 clients et a pu obtenir le graphique représentant les fréquences pour chaque échantillon ci-dessous.



Luis a ensuite interrogé les 1 000 derniers clients d'un magasin : 800 n'ont pas vu leur facture baisser, 140 ont eu une baisse de 10 €, 50 ont eu une baisse de 20 €.
Qu'en pensez-vous ?

75 Dans son jeu vidéo favori, Astrid peut ouvrir des coffres dont le contenu est aléatoire. Ils peuvent contenir des émeraudes vertes qui valent dix points, des rubis rouges qui valent 5 points ou un voleur bleu qui lui vole 5 points.
Le graphique ci-dessous donne les fréquences obtenues pour 100 échantillons de taille 200 de l'ouverture d'un coffre.
Les points bleus représentent les fréquences d'obtention d'un voleur, les points rouges celles des rubis, et les points verts celles des émeraudes.



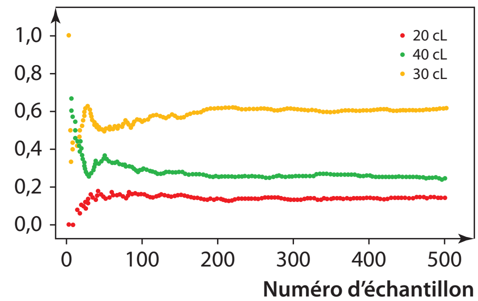
1. À l'aide de ce graphique, donner une estimation de la probabilité d'obtention d'une émeraude à ce jeu.

2. Astrid a-t-elle intérêt à ouvrir les coffres dans ce jeu ?

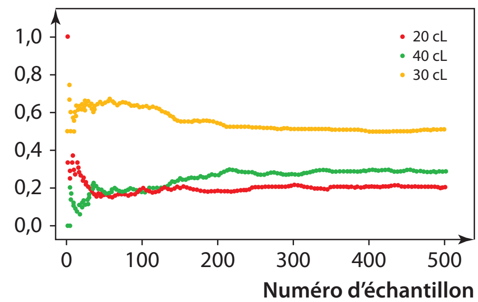
76 Dans le bar Aléat', lorsque l'on commande un jus d'orange, une machine donne au hasard un nombre entier aléatoire entre 1 et 100. Si celui-ci est compris entre 1 et 20 (compris), le serveur nous sert 20 cl de jus d'orange, si le nombre est compris entre 21 et 70 (compris), le serveur nous sert 30 cL. Sinon, le serveur nous sert 40 cL.
Sophia a analysé un échantillon des valeurs des contenances servies à 1 000 clients. Elle a tracé les nuages de points de coordonnées $(i\,;f_p(i))$ où i est le rang du client et $f_p(i)$ la fréquence, pour chacune des contenances p, entre le premier et le i-ième client.

1. Parmi chacun des graphiques ci-dessous, quel est celui que pourrait avoir obtenu Sophia ?

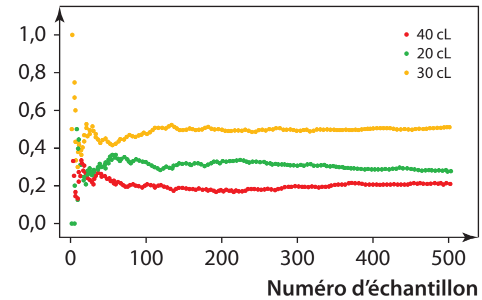
1 **Fréquence**



2 **Fréquence**



3 **Fréquence**



2. Un client se présente un grand nombre de fois au bar. Quelle est la contenance moyenne à laquelle il peut s'attendre dans son verre ?

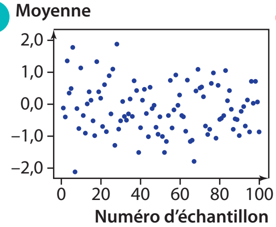
77 On considère un jeu de hasard et X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à ce jeu. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	−9	2	10	100
$P(X = x_i)$	0,7	0,15	0,1	0,05

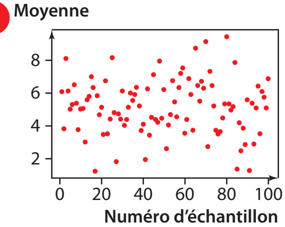
1. Écrire un programme Python permettant de simuler ce jeu.

2. Adam a créé un programme informatique simulant ce jeu et une commande permettant de calculer la moyenne d'une liste. Il a alors calculé les moyennes de 100 échantillons de taille 800 (800 parties) obtenues par simulation et a fait afficher à l'écran un graphique donnant les moyennes de chacun des échantillons.
Parmi les deux graphiques ci-dessous, lequel a pu obtenir Adam ? Expliquer.

1 **Moyenne**



2 **Moyenne**



Travailler autrement

À l'oral

78 Timothée n'arrive pas à se décider entre deux jeux de hasard. **Problème ouvert**

But ! Pour un ticket qui coûte 1 €, il est indiqué les lots suivants : pour 3 millions de tickets de jeu, il y a 2 lots de 4 000 € ; 5 de 400 € ; 20 de 100 € ; 77 000 de 10 € ; 60 000 de 4 € ; 295 000 de 2 € et 323 000 de 1 €.

As de Carte Pour un ticket qui coûte 2€, il est indiqué les lots suivants : pour 4,5 millions de tickets de jeu, il y a 3 lots de 40 000 € ; 23 de 1 000 € ; 1 000 de 200 € ; 10 588 de 50 € ; 61 890 de 20 € ; 151 960 de 10 € ; 483 800 de 4 € et 300 000 de 2 €.

Comparer ces deux jeux en présentant vos arguments pour aider Timothée à choisir.

79 Blaise Pascal est un mathématicien qui a travaillé sur les probabilités.
Effectuer une recherche sur ses travaux, ses contemporains et le siècle pendant lequel il a vécu.
On présentera les résultats sous la forme d'un exposé de 5 minutes à l'oral.

80 Proposer un exercice (ou une situation) dans lequel le problème revient à calculer une espérance, puis en écrire un corrigé. En groupe
Échanger votre exercice avec celui d'un autre groupe puis résoudre cet exercice.

81 Pour comparer

On considère les deux jeux suivants :

Jeu 1 : on mise 5 € puis on tire au hasard une boule dans une urne qui contient 15 boules (3 boules bleues, 4 boules rouges, 6 boules vertes et 2 boules noires).
- Si on tire une boule noire on gagne 20 €.
- Si on tire une boule bleue on gagne 10 €.
- Si on tire une boule rouge on récupère la mise.
- Si on tire une boule verte on ne gagne rien.

Jeu 2 : on mise m euros puis on lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
- Si on fait 5 ou 6, on gagne trois fois la mise.
- Si on fait 3 ou 4, on récupère la moitié de la mise.
- Si on fait 1 ou 2, on ne gagne rien.

On appelle X la variable aléatoire associant le gain (en tenant compte de la mise) à une expérience au jeu 1 et Y celle associant le gain (en tenant compte de la mise) à une expérience au jeu 2.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.
3. Déterminer la loi de probabilité de Y (certains résultats seront donnés en fonction de m).
4. Comment faut-il choisir m pour que le jeu 2 soit plus intéressant en moyenne que le jeu 1 ?
5. Proposer un programme ou un algorithme permettant de simuler le jeu 1.

82 À la pêche

Pour Clément, la pêche est une histoire de chance. Quand il va à la pêche au bord de la rivière, il sait qu'il a 2 chances sur 7 de ne pas ramener de poisson, 3 chances sur 7 de ramener un poisson, 1 chance sur 7 de ramener deux poissons et 1 chance sur 7 de ramener 4 poissons.
On note X la variable aléatoire associant à chaque sortie le nombre de poissons pêchés.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$.
3. Clément dit à son père qu'en moyenne il ramènera environ un poisson lors de ses sorties pêches.
Qu'en pensez-vous ?

83 Avec n boules

Une urne contient n boules jaunes (n entier supérieur ou égal à 4) et 5 boules vertes.
On tire au hasard, successivement et avec remise, deux boules dans l'urne.
Si les deux boules tirées sont jaunes, on perd 5 € ; si les deux boules tirées sont vertes, on gagne 10 €, sinon on gagne 5 €.

1. Construire un arbre pondéré résumant la situation.
2. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du jeu.
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Calculer $E(X)$ en fonction de n.
c) Comment doit-on choisir n pour que l'espérance soit négative ?

84 Une inconnue

X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	-100	5	10	20
$p(X = x_i)$	p	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

1. Si $p = 0{,}2$, calculer $E(X)$.
2. Calculer p pour que l'espérance de X soit égale à 4.

85 Durée sans panne

Une entreprise fabrique des sèches-cheveux. Son service de qualité a relevé le nombre d'années entières (donc arrondi par défaut) écoulées avant la première panne pour chacun des sèches-cheveux d'un échantillon. Ces données ont permis de donner des estimations des probabilités pour ces durées avant la première panne.

```python
import random
alea=random.random()
if alea <= 1/6:
        print("2 ans")
if alea >1/6 and alea <=0.5:
        print("4 ans")
if alea > 0.5:
        print("5 ans")
```

Léon a écrit le programme ci-dessus permettant de simuler le nombre d'années entières avant la première panne pour un sèche-cheveux.
Si le programme affiche « 2 ans », cela signifie qu'un sèche-cheveu a fonctionné 2 ans (entiers) avant la première panne.

1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'années entières écoulées avant la première panne.
Donner la loi de probabilité de X.
2. Est-il vrai qu'un sèche-cheveux tombera en panne avant 7 ans ?
3. Quelle est le durée moyenne avant qu'un sèche-cheveux ne tombe en panne ?

86 Maladie

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt avec le test, on peut le guérir à moindre coût. Si le test est négatif bien que l'animal soit malade, le traitement est plus long et cher (en plus du risque potentiel de contagion).
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie. De plus :
- Si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- Si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

1. Faire un arbre pondéré résumant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'un animal soit porteur de la maladie et que le test soit positif.
3. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 10 € et le coût du traitement long d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 €. On suppose que le test est gratuit. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.

(D'après bac)

Travaux pratiques

Calculer 30 min

1 Espérance, Variance et écart-type avec la calculatrice

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	0	10	15	20	25
$p(X = x_i)$	0,20	0,25	0,37	0,12	0,06

1. On souhaite calculer son espérance, sa variance et son écart-type à l'aide de la calculatrice.

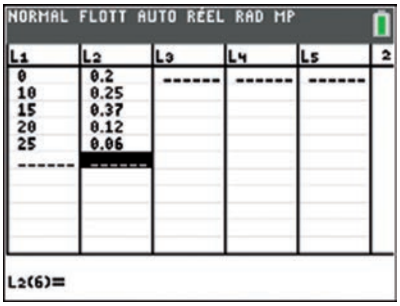
TI-83 Premium CE

– Appuyer sur la touche stats puis choisir **`1:Modifier`**.

– Si la liste **`L1 (resp.L2)`** n'est pas vide, se déplacer sur **`L1 (resp.L2)`** avec les flèches puis appuyer sur la touche annul puis entrer.

– Saisir les valeurs 0 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 dans L1.

– Saisir les probabilités correspondantes dans L2.



– Appuyer sur la touche stats puis accéder au menu **`CALC`** et choisir **`1:Stats 1 Var`**.

– Taper L1 (avec les touches 2nde et 1) en face de **`Xliste`** puis L2 en face de **`ListeFréq`**.
Aller sur calculer et valider.

– L'espérance de X est la première valeur $\overline{x}$ et l'écart-type de X est la cinquième valeur σx.

Numworks

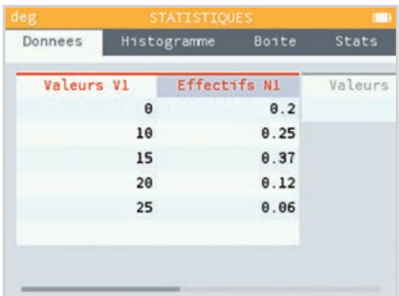
– Appuyer sur la touche ⌂ et choisir le menu statistiques.

– Avec les flèches, se déplacer sur **`Données`** et valider avec EXE.

– Si les listes ne sont pas vides, se déplacer sur **`Valeurs`** (ou **`Effectifs`**) et appuyer sur EXE. Choisir **`Effacer la colonne`**.

– Saisir les valeurs 0 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 dans la colonne **`Valeurs`**.

– Saisir les probabilités correspondantes dans la colonne **`Effectifs`**.



– Avec les flèches, se déplacer sur **`Stats`** et valider avec EXE.

– On peut lire directement l'espérance qui correspond à la moyenne et l'écart-type (et la variance).

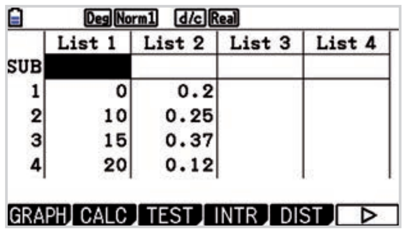
Casio Graph 90+E

– Appuyer sur la touche MENU et choisir le menu **`statistiques`**.

– Si la liste **`List1 (resp. List2)`** n'est pas vide, se déplacer sur **`List1 (resp. List2)`** avec les flèches puis appuyer sur la touche F6 puis choisir **`DEL-ALL`** et sélectionner oui.

– Saisir les valeurs 0 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 dans **`List1`**.

– Saisir les probabilités correspondantes dans **`List2`**.

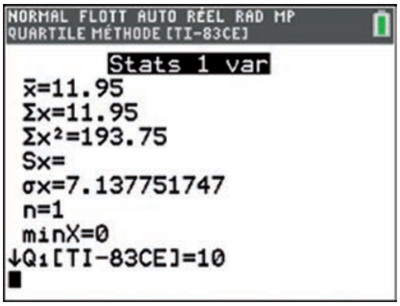
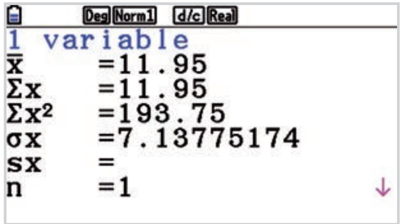


– Appuyer deux fois sur la touche F6 puis accéder au menu **`CALC`**.

– Sélectionner **`SET`** : il faut que **`1Var Xlist`** soit sur **`List1`** et **`1Var Freq`** sur **`List2`**.

– Si ce n'est pas le cas, se déplacer sur **`1Var Xlist (resp. 1Var Freq)`** puis choisir **`LIST`** avec la touche F1 puis taper **`1 (resp. 2)`** pour indiquer le numéro de la liste.

– Appuyer sur EXIT et choisir **`1-VAR`** avec la touche F1.

TI-83 Premium CE	Numworks	Casio Graph 90+E
		– L'espérance de X est la première valeur $\overline{x}$ et l'écart-type de X est la quatrième valeur σx. 

2. Déterminer la variance de X.

3. À l'aide de la calculatrice, donner des valeurs approchées à 0,01 près de l'espérance, l'écart-type et la variance de la variable aléatoire Y dont la loi de probabilité est donnée par :

y_i	-4	1	10	$1\,000$
$p(Y = y_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{100}$	$0{,}219$	$\frac{1}{1\,000}$

Algo & Prog — TICE — Chercher, modéliser — 25 min

2 Simuler une variable aléatoire avec Python

On considère le programme suivant.

```
import random
import math

def simulation(listeval,listeprob):
        aleatoire=random.random()
        somme=0
        compteur=0
        if aleatoire==0:
            valeur=listeval[compteur]
        for p in listeprob:
            if (somme<aleatoire) and (aleatoire<=somme+p):
                valeur=listeval[compteur]
            somme=somme+p
            compteur=compteur+1
        return valeur
```

1. Saisir la fonction ci-contre dans l'éditeur PYTHON.

2. On considère une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous, qui va servir à créer les listes (de taille 3) des X_i (`listevaleur1`) et p_i (`listeproba1`) :

X_i	-4	5	30
p_i	0,1	0,8	0,1

a) Créer, dans l'éditeur PYTHON, à la suite de cette fonction, un programme principal qui :

- crée la liste `listevaleur1` des valeurs prises par X ;
- crée la liste `listeproba1` des valeurs des probabilités correspondantes ;
- fait afficher le résultat de l'exécution de la fonction *simulation* avec pour arguments les listes `listevaleur1` et `listeproba1`.

b) Exécuter ce programme plusieurs fois. Qu'affiche-t-il ?

3. Un jeu est tel que :

- La probabilité de perdre 4 € est égale à 0,56 ;
- La probabilité de gagner 1 € est égale à 0,41 ;
- La probabilité de gagner 2 € est égale à 0,02 ;
- La probabilité de gagner 100 € est égale à 0,01.

Modifier le programme précédent pour faire une simulation de ce jeu.

1 Définir et utiliser une variable aléatoire

QCM

Pour les exercices 103 à 105, on considère le jeu suivant :
On lance deux fois successivement un dé équilibré à 6 faces. On gagne 3 € par résultat supérieur ou égal à 5 obtenu et on perd 2 € par résultat inférieur à 5 obtenu. Par exemple, si on obtient un 5 puis un 3, on gagne 3 − 2 = 1 €.
Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique associé à ce jeu.

103 Quelles valeurs peut prendre X ?
- a 0 ; 1 ; 6
- b −4 ; 1 ; 6
- c 3 ; 0 ; −2
- d Aucune des réponses précédentes

104 $p(X = 6)$ est égale à :
a $\frac{1}{2}$ b $\frac{1}{6}$ c $\frac{1}{9}$ d $\frac{1}{4}$

105 La probabilité de perdre de l'argent est :
a 0 b $\frac{1}{9}$ c $\frac{4}{9}$ d $-\frac{2}{9}$

106 ✶ On considère une variable aléatoire Y dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

y_i	−10	−2	1	30
$p(Y = y_i)$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	…	$\frac{2}{11}$

1. Quelle est la valeur manquante dans ce tableau ?
2. Calculer $p(Y < 0)$ et $p(Y > 0)$.

107 ✶ Une urne contient n jetons (n entier supérieur ou égal à 10) numérotés de 1 à n.
Pour une mise de 2 €, on tire au hasard un jeton. Si le numéro est supérieur ou égal à 8, on récupère la mise de départ et on gagne 10 €, sinon on perd la mise de départ. Modéliser cette situation à l'aide d'une variable aléatoire.

108 ✶✶ X est une variable aléatoire prenant pour valeur les nombres entiers de 0 à 100 telle que $p(X < 40) = 0{,}47$ et $p(X = 40) = 0{,}02$. Déterminer $p(X \geqslant 41)$.

109 ✶✶ On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

x_i	0	2	5	8	10
$p(X = x_i)$	0,05	$\frac{2}{5}$	…	$\frac{1}{10}$	…

Calculer $p(X = 10)$ sachant que $p(X < 6) = 0{,}67$.

2 Obtenir et utiliser une simulation

QCM

Pour les exercices 110 et 111, on considère la fonction Python écrite ci-dessous qui permet d'obtenir au hasard une valeur prise par une variable aléatoire X :

```
def simulation():
        alea=random.random()
        if alea <= 0.10:
              resultat=100
        if alea <= 0.25 and alea > 0.10:
              resultat=50
        if alea > 0.25:
              resultat=-5
        return resultat
```

110 Que vaut $p(X = 50)$?
- a 0,10
- b 0,25
- c 0,15
- d Aucune des réponses précédentes

111 Pour obtenir un échantillon de taille 50 de simulations de X, on peut écrire :
- a `echantillon=[simulation() for i in range(50)]`
- b `echantillon=[random.random() for i in range(50)]`
- c `echantillon=[simulation() for i in range(51)]`

Pour les exercices 112 et 113, on lance trois fois de suite une pièce équilibrée. On considère la variable aléatoire Y donnant à chaque expérience le nombre de Pile obtenu sur ces trois lancers.

112 ✶ Écrire une fonction `simul_piece()` en Python renvoyant une simulation de cette variable aléatoire.

113 ✶✶ Écrire une fonction Python `moyenne(n)` qui crée un échantillon simulé de taille n de la variable aléatoire et qui renvoie la moyenne obtenue du nombre de Pile sur l'échantillon.

3 Calculer, interpréter et utiliser une espérance

QCM

114 On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

x_i	-2	0	5	25	100
$p(X = x_i)$	0,4	0,05	0,25	0,15	0,15

L'espérance de X est :
- a nulle
- b égale à 19,2
- c supérieur à 20
- d négative

115 L'espérance d'une variable aléatoire donnant le gain algébrique à un jeu est strictement positive. Quelles affirmations vous semblent-elles correctes ?
- a En jouant une seule fois, on est sûr de gagner.
- b Sur un grand nombre de parties, on peut espérer gagner de l'argent.
- c On peut peut-être perdre de l'argent à ce jeu si on joue peu de fois.
- d Ce jeu est équitable.

116 ✶ On tourne une roue dont les secteurs A, B et C ont pour angles respectifs 180° ; 120° et 60°. On mise 2 € puis on tourne la roue. Si on tombe sur la zone B on gagne 3 €, si on tombe sur la zone C on gagne 6 €.
Ce jeu est-il équitable ?

117 ✶ Lorsqu'il joue aux fléchettes, Nathan touche la cible avec une probabilité de $\frac{2}{5}$. Il lance deux fois de suite une fléchette. Les lancers sont indépendants.
X est la variable aléatoire donnant le nombre de fois où il touche la cible sur les deux lancers.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$.

118 ✶ On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

x_i	-4	a	2	5
$p(X = x_i)$	0,24	0,2	0,5	...

Quelle valeur faut-il donner au nombre a pour obtenir $E(X) = 0$?

119 ✶ X est une variable aléatoire modélisant les gains algébriques d'un jeu et telle que $E(X) = -1$.
1. Soit $Y = X - 3$. Calculer $E(Y)$.
2. L'organisateur du jeu souhaite multiplier tous ses gains algébriques par 2,5. Que devient l'espérance de la variable aléatoire associée aux nouveaux gains ?

120 ✶✶ Une urne contient 50 jetons sur lesquels on a inscrit -2 ; 4 ou 17. On tire au hasard un jeton et on gagne (ou perd) la valeur en euros indiquée par le numéro du jeton. Il y a 4 jetons numérotés 17.
Quel est le nombre de jetons sur lesquels est inscrit -2 pour que le jeu soit équitable ?

4 Calculer et utiliser les indicateurs d'une variable aléatoire

QCM

Pour les exercices 121 à 123, on considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	-4	-3	0	1	4	10
$p(X = x_i)$	0,22	0,3	0,1	0,17	0,19	0,02

On pourra utiliser la calculatrice.

121 $E(X)$ est égale à :
- a 0,65
- b $-0,65$
- c environ 1,33
- d environ 0,17

122 $\sigma(X)$ vaut environ :
- a 0,32
- b 3,32
- c 11
- d 0

123 La variance de X vaut environ :
- a 1,82
- b 3,32
- c 11,43
- d 11

124 ✶ On considère deux jeux dont les gains (en enlevant la mise de départ) et les probabilités de gagner sont donnés ci-dessous.

Gain du jeu 1	-100	10	20	100	500
Probabilité	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
Gain du jeu 2	$-1\,500$	-150	$2\,000$		
Probabilité	0,15	0,69	0,16		

Donner plusieurs indicateurs permettant de comparer ces deux jeux.

125 ✶✶ On lance trois fois successivement une pièce équilibrée.
X est la variable aléatoire donnant le nombre de Face obtenu sur ces trois lancers.
En utilisant la définition, calculer la valeur exacte de la variance $V(X)$.