

Exercice 1**4 points**

2 points	a) Décomposez les nombres suivants en produit de facteurs premiers : 440 et 198.
1 point	b) Simplifier la fraction suivante : $\frac{440}{198}$.
1 point	c) Donnez la décomposition en produit de facteurs premiers du ppcm de 440 et 198 (on ne demande pas de calculer ce nombre).

a) 440 est divisible par 2, ça donne 220, qui est encore divisible par 2, ça donne 110, encore divisible par 2, ça donne 55, qui est divisible par 5, ça donne 11. Donc $440 = 2^3 \times 5 \times 11$.

Idem pour $198 = 2 \times 3^2 \times 11$.

b) Du coup on peut écrire que $\frac{440}{198} = \frac{2^3 \times 5 \times 11}{2 \times 3^2 \times 11} = \frac{2^2 \times 5}{3^2} = \frac{20}{9}$.

c) Pour le ppcm de 440 et 198, il faut garder chaque nombre premier qui apparaît dans l'une ou l'autre décomposition, et prendre la puissance la plus grande :

$$\text{ppcm}(440, 198) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11.$$

Exercice 2**4 points**

	L'unité choisie est le centimètre. On considère un rectangle ayant pour longueur $\sqrt{75}$ et pour largeur $\sqrt{48}$.
2 points	a) Déterminer le périmètre exact de ce rectangle. Donner la réponse sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers relatifs et b le plus petit possible.
2 points	b) Calculer l'aire exacte du rectangle. Donner la réponse sous la forme la plus simple possible.

a) On peut commencer par écrire $\sqrt{75}$ et $\sqrt{48}$ plus simplement :

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \sqrt{3} = 5\sqrt{3}; \quad \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Le périmètre, c'est deux fois la longueur plus deux fois la largeur, donc en centimètres : $p = 2 \times 5\sqrt{3} + 2 \times 4\sqrt{3} = 10\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$. Le périmètre est de $18\sqrt{3}$ cm.

b) L'aire, c'est la longueur fois la largeur, donc en centimètres carrés : $a = 5\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 5 \times 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 20 \times 3 = 60$. L'aire est de 60 cm^2 .

Exercice 3**7 points**

2 points	a) Écrire $\sqrt{0,000001}$ sous forme décimale.
3 points	b) Écrire $2,0\bar{1}$ sous forme de fraction (avec dénominateur et numérateur entiers).
2 points	c) Écrire $\frac{-3}{\sqrt{5}}$ avec un dénominateur entier.

a) $\sqrt{0,000001} = \sqrt{\frac{1}{1\,000\,000}} = \frac{1}{1\,000} = 0,001$.

b) On commence par obtenir la fraction qui représente $0,0\bar{1}$. Pour cela, on écrit que :

$$10 \times 0,0\bar{1} = 0,1\bar{1} \text{ et que donc, en enlevant } 0,0\bar{1} \text{ de chaque côté, il vient que } 9 \times 0,0\bar{1} = 0,1. \text{ Du coup, } 0,0\bar{1} = \frac{0,1}{9} = \frac{1}{90}. \text{ Au final } 2,0\bar{1} = 2 + \frac{1}{90} = \frac{180}{90} + \frac{1}{90} = \frac{181}{90}.$$

On pouvait aussi écrire directement, en notant $x = 2,0\bar{1}$ que $100x = 201,\bar{1}$ et $10x = 20,\bar{1}$ du coup : $100x - 10x = 201,\bar{1} - 20,\bar{1}$, c'est-à-dire $90x = 181$, d'où le même résultat.

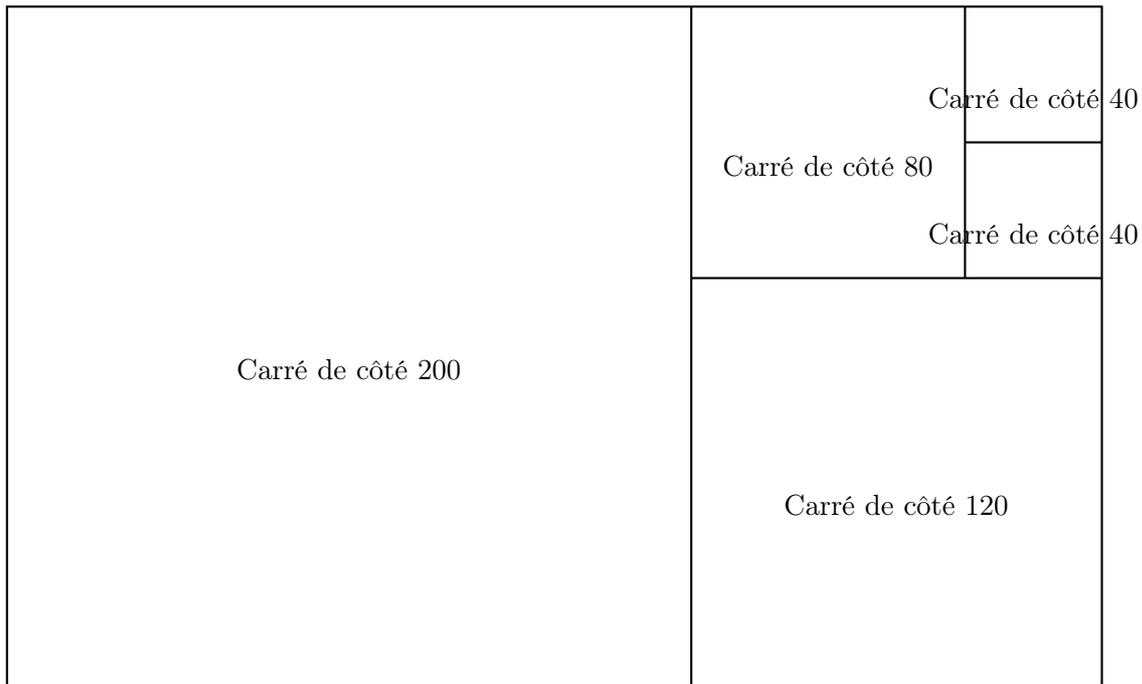
c) $\frac{-3}{\sqrt{5}} = \frac{-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{-3\sqrt{5}}{5}$.

Exercice 4

2 points

2 points	Je veux carrelé un sol rectangulaire de taille 320 cm par 200 cm avec des carrelages carrés tous de même taille. Quelle est la taille maximale de carrelages que je puisse choisir ?
----------	--

On peut remarquer que cela demande simplement de calculer $\text{pgcd}(320, 200) = 40$ donc les carrelages ont une taille de 40 cm. Ou sinon, cela correspond au dessin suivant :



Exercice 5

2 points

2 points	Le nombre $\frac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$ est un nombre entier. Justifier toutes les étapes du calcul suivant qui permet de l'affirmer. À chaque étape, on indiquera la formule utilisée.
----------	--

$$\frac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{4 \times 3}}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{4}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{5 \times 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 5$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}} \\
 = & \frac{5\sqrt{4 \times 3}}{2\sqrt{3}} && \left. \begin{array}{l} \text{On reconnaît un carré parfait dans le radicande.} \\ \text{On utilise } \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}. \end{array} \right\} \\
 = & \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{4}\sqrt{3}} && \\
 = & \frac{2\sqrt{3}}{5 \times 2\sqrt{3}} && \left. \begin{array}{l} \text{On simplifie la racine car } 4 = 2^2. \\ \text{On simplifie en haut et en bas par } 2\sqrt{3}. \end{array} \right\} \\
 = & 5
 \end{aligned}$$

Exercice 6

BONUS	Expliquer si les affirmations suivantes sont vraies ou non.
	a) Il existe des nombres réels a et b pour lesquels $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
	b) Pour tous les nombres réels a et b , $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

- a) La phrase « Il existe des nombres réels a et b pour lesquels $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. » est vraie. Effectivement, on peut prendre $a = 0$ et $b = 4$ par ex., et ça fonctionne. C'est une phrase qui est fautive en général, bien sûr, mais il y a des exceptions (quand a et/ou b vaut 0, donc).
- b) La phrase « Pour tous les nombres réels a et b , $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. » est fautive : si a et b sont tous les deux négatifs, alors $\sqrt{a \times b}$ existe (car $a \times b \geq 0$) mais ni \sqrt{a} ni \sqrt{b} n'existe donc leur produit n'a pas de sens. La formule est vraie seulement si a et b sont positifs, comme on l'a écrit dans le cours.