Exercice 1 - Géométrie

1. Cf. votre patron.
2. (a) Dans le solide, $(ABCD)//(EFGH)et(CBFG)//(EHAD)$.

   (b) Dans le solide, (AB) et (EF) sont parallèles ; (AB) et (CD) sont sécantes (en dehors du solide) ; (EH) et (BC) sont parallèles ; (EF) et (CD) sont non-coplanaires.
3. (a) Pour trouver le cosinus de l'angle $\widehat{FCB}$, on peut se placer dans le triangle FCB rectangle en B. La trigonométrie nous donne $cos(\widehat{FCB}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{CB}{CF}$. On connait $CB = 5$, il nous reste à calculer CF. Pour ce faire, on va utiliser le théorème de Pythagore toujours dans FCB rectangle en B. CF étant l'hypoténuse, on peut écrire :
   $CF^2 = CB^2 + BF^2 = 7^2 + 3^2 = 49 + 9 = 58$, donc $CF = \sqrt{58}$.
   On peut conclure que $\boxed{cos(\widehat{FCB}) = \frac{7}{\sqrt{58}}}$.
   En utilisant la touche cos^{-1} ou $arccos$ de la calculatrice, on peut maintenant trouver l'angle (attention à bien mettre la calculatrice en degrés) : $\widehat{FCB} = cos^{-1}(\frac{7}{\sqrt{58}}) \approx \boxed{23.2^\circ}$

   (b) Pour trouver le cosinus de l'angle $\widehat{FGH}$, on va chercher un triangle rectangle dans lequel travailler. Appelons d la parallèle à (EF) qui passe par H. d coupe (FG) en un point que l'on va appeler I. Puisque $(EF)//(IH)$ et que $(EF) \perp (FG)$, on peut en déduire que $(IH) \perp (FG)$. Ainsi GIH est un triangle rectangle en I. On peut donc utiliser la trigonométrie dans GIH pour calculer le cosinus de l'angle $\widehat{FGH}$ (puisque $\widehat{FGH} = \widehat{IGH}$, car F, I et G sont alignés) : $cos(\widehat{FCB}) = \frac{GI}{GH}$
   Il nous reste maintenant à calculer IG et GH. $FEHI$ est un quadrilatère qui a 3 angles droits ainsi que deux côtés adjacents de même longueur (EF et EH), donc c'est un carré. Donc $FI = 3$.
   On peut donc en conclure que $IG = FG - FI = 7 - 3 = 4$.
   Il nous reste maintenant à calculer GH. Pour cela, on peut utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle IGH rectangle en I : $GH^2 = IH^2 + IG^2$. Donc $GH^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.
   Donc $GH = 5$.
   Je peux maintenant terminer le calcul : $\boxed{cos(\widehat{FCB}) = \frac{GI}{GH} = \frac{4}{5}}$.
   En utilisant la touche cos^{-1} ou $arccos$ de la calculatrice, on peut maintenant trouver l'angle (attention à bien mettre la calculatrice en degrés) : $\widehat{FGH} = cos^{-1}(\frac{4}{5}) \approx \boxed{36.9^\circ}$

   (c) Vérification : $\frac{cos(\widehat{FCB})}{cos(\widehat{FGH})} = \frac{\frac{7}{\sqrt{58}}}{\frac{4}{5}} = \frac{7}{\sqrt{58}} \times \frac{5}{4} = \frac{7\times 5}{4\times\sqrt{58}} = \frac{35}{4\sqrt{58}} (\approx 1.15)$.
   L'autre quotient vaut $\frac{\widehat{FCB}}{\widehat{FGH}} \approx \frac{23.2}{36.9} \approx 0.63$. Ainsi le rapport des cosinus n'est pas le même que le rapport des angles : attention à ne pas "simplifier par cos" dans la fraction, ce qui n'a pas de sens (de même en physique dans des problèmes d'optique, ne pas "simplifier par sinus")

Exercice 2 - Un algorithme

$1 \xrightarrow{\text{On ajoute 1}} 2 \xrightarrow{\text{On multiplie par 2}} 4 \xrightarrow{\text{On retranche 3}} 1 \xrightarrow{\text{On élève au carré}} 1 \xrightarrow{\text{On ajoute 7}} \boxed{8}$

$2 \xrightarrow{\text{On ajoute 1}} 3 \xrightarrow{\text{On multiplie par 2}} 6 \xrightarrow{\text{On retranche 3}} 3 \xrightarrow{\text{On élève au carré}} 9 \xrightarrow{\text{On ajoute 7}} \boxed{16}$

$-2 \xrightarrow{\text{On ajoute 1}} -1 \xrightarrow{\text{On multiplie par 2}} -2 \xrightarrow{\text{On retranche 3}} -5 \xrightarrow{\text{On élève au carré}} 25 \xrightarrow{\text{On ajoute 7}} \boxed{32}$

$x \xrightarrow{(+1)} x+1 \xrightarrow{(\times 2)} 2 \times (x+1) = 2x+2 \xrightarrow{(-3)} 2x-1 \xrightarrow{\text{On élève au carré}} (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1 \xrightarrow{(+7)} \boxed{4x^2 - 4x + 8}$

Exercice 3 - Un peu de physique des particules

L'énoncé ne comporte aucune variable. Lorsqu'on va le mettre en équation, il va donc falloir créer des variables et expliquer à quoi elles correspondent.

Pour la correction, nous allons choisir q_{up} la charge d'un quark up et q_{down} la charge d'un quark down. En traduisant mathématiquement l'énoncé, on arrive au système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} 2q_{up} + q_{down} = 1 (L_1) \\ q_{up} + 2q_{down} = 0 (L_2) \end{cases}$$

<u>Méthode 1 :</u> par substitution

On remarque que la seconde ligne nous donne tout de suite l'expression de q_{up} en fonction de q_{down} (on aurait pu faire de même avec la première ligne, mais l'expression de la seconde ligne est plus simple). On peut donc résoudre ce système à l'aide de la méthode par substitution.

La méthode par substitution consiste à exprimer une des variables (ici, q_{up}) en fonction de l'autre (ici, q_{down}) dans l'une des deux équations, afin de remplacer dans l'autre équation. Ainsi on se retrouve avec une équation qui n'a plus qu'une seule variable, qu'on va donc pouvoir résoudre. Enfin, une fois qu'on a trouvé q_{down}, on peut le remplacer par sa valeur dans l'autre équation afin de trouver q_{up}.

$$\begin{cases} 2q_{up} + q_{down} = 1 \\ q_{up} = -2q_{down} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2q_{down}) + q_{down} = 1 \\ q_{up} = -2q_{down} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4q_{down} + q_{down} = 1 \\ q_{up} = -2q_{down} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3q_{down} = 1 \\ q_{up} = -2q_{down} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_{down} = -\frac{1}{3} \\ q_{up} = -2q_{down} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_{down} = -\frac{1}{3} \\ q_{up} = -2 \times (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

<u>Méthode 2 :</u> par combinaison linéaire (également appelée par élimination)

Cette méthode consiste à multiplier une ligne par un nombre de manière à ce que l'addition des deux lignes obtenues élimine une des deux variables. Ici, on voit tout de suite qu'en multipliant la seconde ligne par -2, on va se retrouver avec $-2q_{up}$ ce qui va nous permettre, en ajoutant avec la première ligne, d'annuler cette variable. On résout alors l'équation qui ne comporte plus que du q_{down} et on remplace dans la ligne qu'on a laissée pour trouver q_{up}.

Attention ! Quand on ajoute les deux lignes, il faut ajouter membre à membre. C'est à dire qu'on ajoute les deux membres de gauche entre eux, et également les deux membres de droite entre eux.

$$\begin{cases} 2q_{up} + q_{down} = 1 \\ -2q_{up} - 4q_{down} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3q_{down} = 1 (L_1 + L_2) \\ -2q_{up} - 4q_{down} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_{down} = -\frac{1}{3} \\ -2q_{up} - 4q_{down} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q_{down} = -\frac{1}{3} \\ -2q_{up} - 4 \times (-\frac{1}{3}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_{down} = -\frac{1}{3} \\ -2q_{up} = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_{down} = -\frac{1}{3} \\ q_{up} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

<u>Vérifier ses résultats</u>

Nous pouvons donc conclure :

$\boxed{\text{La charge d'un quark down est de } -\frac{1}{3} \text{ et celle d'un quark up est de } \frac{2}{3}.}$

C'est bien de vérifier les résultats au brouillon (au cas où il y a une erreur de calcul). Par contre, c'est une perte de temps de le faire sur la copie. En effet, le raisonnement est entièrement par équivalence et donc il est certain (s'il n'y a pas d'erreur de calcul bien sûr) que les solutions trouvées vérifient bien le système de départ.