Exercice 1 - Résolution de problème

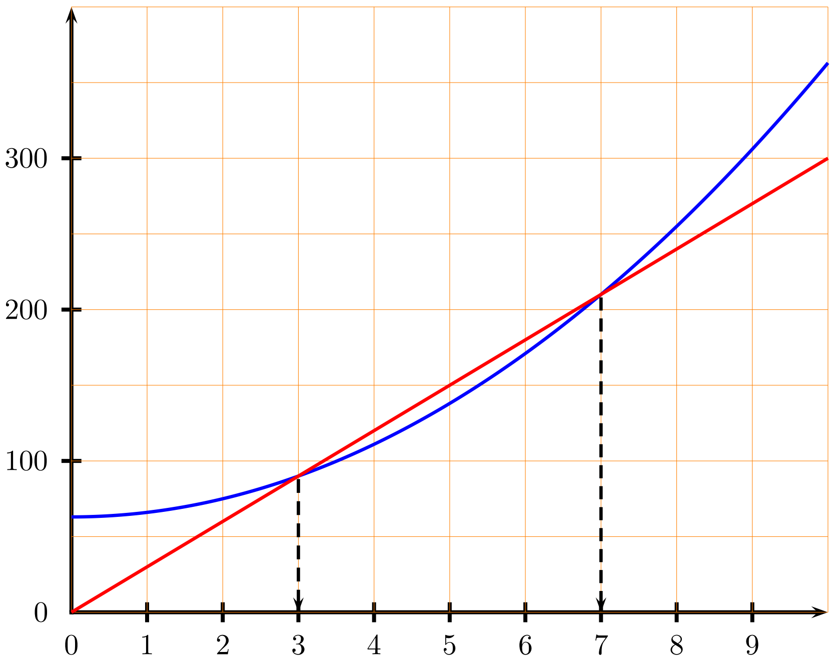
Partie A : Le cordonnier est toujours le plus mal chaussé

1. (a) La fonction "Table" de la calculatrice donne le tableau de valeurs suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	63	66	75	90	111	138	171	210	255	306	363

   (b) On nous définit la fonction *depenses* sur $[0;10]$, on fixe donc $\boxed{\text{Xmin} = 0\,;\ \text{Xmax} = 10}$. On vient de voir que les valeurs de *depenses* étaient comprises entre 63 et 363. On fixe donc $\boxed{\text{Ymin} = 50\,;\ \text{Ymax} = 400}$.

   (c) Courbe du coût de production (exprimé en euros) en fonction du nombre de paires produites.



2. (a) L'entreprise vend 1 paire de chaussures pour 30 euros donc elle en vend x pour $30x$ euros ce qui donne $\boxed{recettes(x) = 30x}$.

   (b) Cf. 1.c)

   (c) Pour que le cordonnier soit bénéficiaire, il faut que ses recettes soient supérieures à ses dépenses. Il faut donc que $recettes(x) \geq depenses(x)$. Il nous suffit alors de regarder sur le graphique où $C_{recettes}$ est au-dessus de $C_{depenses}$. Cf. 1.c) pour les traits de construction : c'est le cas pour $x \in [3;7]$. Il faut donc que le cordonnier produise et vende $\boxed{\text{entre 3 et 7 paires de chaussures}}$ pour être bénéficiaire.

3. (a) On sait que bénéfices = recettes - dépenses. On a donc $benefices(x) = recettes(x) - depenses(x) = 30x - (3x^2 + 63) = \boxed{-3x^2 + 30x - 63}$.

   (b) $(3-x)\times(3x-21) = 3\times 3x - 3\times 21 - x\times 3x + x\times 21 = 9x - 63 - 3x^2 + 21x = -3x^2 + 30x - 63 = benefices(x)$

   (c)
$$\begin{aligned} 3 - x &> 0 \quad {+x} \\ 3 &> x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3x - 21 &> 0 \quad {+21} \\ 3x &> 21 \quad {\div 3} \\ x &> 7 \end{aligned}$$

x	0		3		7		10
Sgn. $3-x$		$+$	0	$-$			
Sgn. $3x-21$				$-$	0	$+$	
Sgn. $benefices(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On retrouve bien que $benefices(x) \geq 0$ nous donne $\boxed{\mathcal{S} = [3;7]}$.

Partie B : Etude de fonction

1. $f(x) = (3-x)\times(3x-21) = 3\times 3x - 3\times 21 - x\times 3x + x\times 21 = 9x - 63 - 3x^2 + 21x = \boxed{-3x^2+30x-63}$

   f est donc $\boxed{\text{une fonction polynomiale du second degré}}$, puisque $f(x)$ peut se mettre sous la forme ax^2+bx+c.

2. On a la forme développée, et on cherche à démontrer qu'on a la forme canonique de la question. Pour cela on va partir de la forme canonique donnée dans la question, on développe, et on retrouve la forme développée.

$$\begin{aligned}
& -3(x-5)^2+12 && \\
= \; & -3(x^2 - 2\times x\times 5 + 5^2) + 12 && \text{On développe le carré.} \\
= \; & -3(x^2 - 10x + 25) + 12 && \text{On simplifie dans la parenthèse.} \\
= \; & -3x^2 + 30x - 75 + 12 && \text{On développe.} \\
= \; & -3x^2 + 30x - 63 && \text{On simplifie.} \\
= \; & f(x) && \text{On reconnait l'expression de départ.}
\end{aligned}$$

3. A partir de la forme canonique, on retrouve les coordonnées du sommet : $(\alpha;\beta)$.

   Ici, $a=-3$; $\alpha = 5$; $\beta = 12$. Ainsi, $\boxed{S(5;12)}$.

4. a vaut -3 donc est négatif, ainsi le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	5	$+\infty$
f(x)	↗	12	↘

5. <u>BONUS :</u> La forme factorisée est du type $a(x-x_1)(x-x_2)$.

   $f(x) = (3-x)(3x-21) = -(x-3)(3(x-7)) = \boxed{-3(x-3)(x-7)}$

Exercice 2 - Fonctions homographiques

1. Une fonction homographique est une fonction dont l'expression peut être mise sous la forme $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$. Par exemple, $j : x \mapsto \dfrac{3x+1}{7-5x}$ est une fonction homographique.

2. - Le seul endroit où la fonction n'est pas définie est lorsque le dénominateur s'annule, donc lorsque $x=0$. Ainsi, $\boxed{D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}}$ (que l'on peut aussi écrire $\mathbb{R}^*$)

     Pour savoir si c'est une fonction homographique, on va mettre son expression sous forme d'une seule écriture fractionnaire, donc en réduisant le tout au même dénominateur.

     $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + 2 = \dfrac{x\times x}{x} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2\times x}{x} = \dfrac{x^2+2x+1}{x}$.

     Au numérateur on a du x^2. Ainsi $\boxed{f \text{ n'est pas une fonction homographique}}$.

   - Le seul endroit où la fonction n'est pas définie est lorsque le dénominateur s'annule, donc lorsque $3-x=0$, soit quand $3=x$. Ainsi, $\boxed{D_g = \mathbb{R}\setminus\{3\}}$

     L'expression est déjà sous forme d'une seule écriture fractionnaire. Le numérateur est une fonction affine, avec $a=0$ et $b=2$. Le dénominateur est également une fonction affine, avec $c=-1$ et $d=3$. Ainsi $\boxed{g \text{ est une fonction homographique}}$.

   - Le seul endroit où la fonction n'est pas définie est lorsque le dénominateur s'annule, donc lorsque $5x+1=0$, soit quand $5x=-1$ c'est à dire $x = \dfrac{-1}{5}$. Ainsi, $\boxed{D_h = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-1}{5}\right\}}$

     Pour savoir si c'est une fonction homographique, on va mettre son expression sous forme d'une seule écriture fractionnaire, donc en réduisant le tout au même dénominateur.

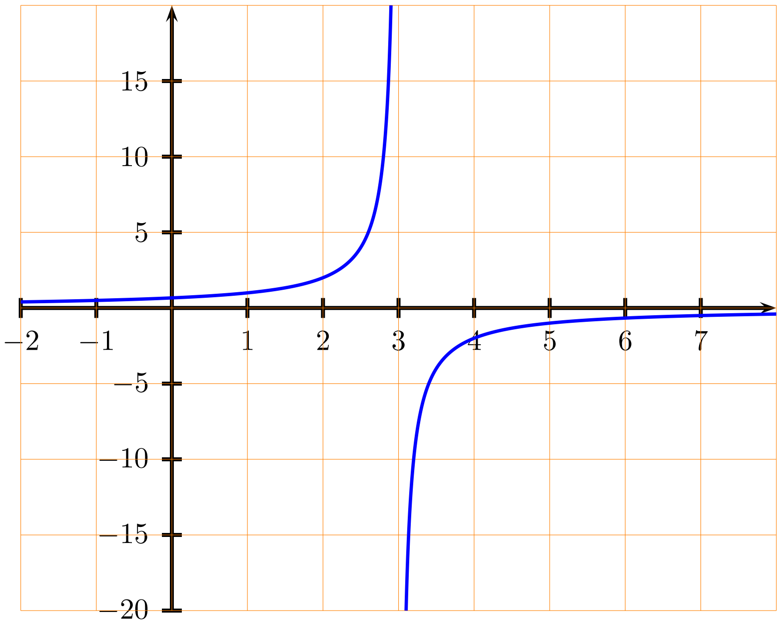
     $h(x) = -3 + \dfrac{1}{5x+1} = \dfrac{-3\times(5x+1)}{5x+1} + \dfrac{1}{5x+1} = \dfrac{-15x-3}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \dfrac{-15x-2}{x+1}$.

     Le numérateur est une fonction affine, avec $a=-15$ et $b=-2$. Le dénominateur est également une fonction affine, avec $c=1$ et $d=1$. Ainsi $\boxed{h \text{ est une fonction homographique}}$.

3. (a) La valeur interdite est en 3 ainsi on va prendre quelques valeurs autour de 3 puis espacer.

x	-2	0	2	2,5	2,9	3,1	3,5	4	6	8
$f(x)$	0,4	0,66	2	4	20	-20	-4	-2	-0,66	-0,4

(b) Courbe de g



(c) <u>BONUS :</u> Le centre de symétrie est en $x = 3$ puisque c'est la valeur interdite. On voit sur les valeurs choisies (ou par lecture graphique) que le centre de symétrie est en $\boxed{(3; 0)}$.

4. <u>BONUS :</u> La fonction n'est pas définie lorsque l'un des dénominateurs s'annule, donc lorsque $1 - x = 0$ ou $x = 0$, soit quand $1 = x$ ou $x = 0$. Ainsi, $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}}$ (que l'on peut aussi écrire $\mathbb{R} \setminus \{0\} \setminus \{1\}$)