BACCALAURÉAT EUROPÉEN 2013

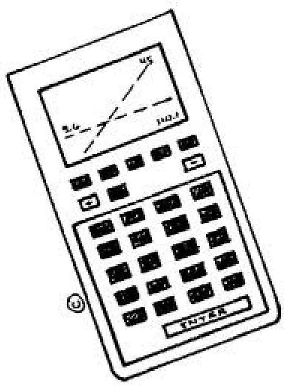
AIDE À LA CORRECTION

MATHÉMATIQUES 3 PÉRIODES
PARTIE B

DATE : 10 juin 2013, matin

DURÉE DE L'EXAMEN :
2 heures (120 minutes)

MATÉRIEL AUTORISÉ :
Examen avec support technologique



PARTIE B		
QUESTION B1 ANALYSE	**Page 1/7**	**Barème**

Les fonctions f et g sont définies respectivement par

$$f(x)=2x^3+3x^2-2x \text{ et } g(x)=-x^2-2x.$$

a) Déterminer les abscisses des points d'intersection des graphiques de f et g et l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)\geq g(x)$. — **4 points**

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-2x=-x^2-2x \Leftrightarrow 2x^3+4x^2=0 \Leftrightarrow 2x^2(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-2$.

Les abscisses des points d'intersection des graphiques de f et g sont $x=0$ et $x=-2$.

$f(x)\geq g(x) \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-2x\geq -x^2-2x \Leftrightarrow 2x^3+4x^2\geq 0 \Leftrightarrow 2x^2(x+2)\geq 0 \Leftrightarrow$

$x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$.

L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)\geq g(x)$ est l'intervalle $\left[-2;+\infty\right[$.

b) Montrer que les graphiques de f et g ont une tangente commune au point d'abscisse $x=0$. Établir une équation de cette tangente. — **3 points**

D'après a), les graphiques de f et g se coupent au point d'abscisse $x=0$.
Pour montrer qu'ils ont une tangente commune en ce point, il suffit de prouver que $f'(0)=g'(0)$.

$f'(x)=6x^2+6x-2$, d'où $f'(0)=-2$ et $g'(x)=-2x-2$, d'où $g'(0)=-2$.

Donc $f'(0)=g'(0)$ et les graphiques de f et g ont une tangente commune au point d'abscisse $x=0$.

$f(0)=g(0)=0$. Donc la tangente commune aux graphiques de f et g à l'origine a pour équation : $y=-2x$.

c) Calculer $\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))\,dx$. — **3 points**

Interpréter le résultat graphiquement.

$$\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))\,dx=\int_{-2}^{0}\left(\left(2x^3+3x^2-2x\right)-\left(-x^2-2x\right)\right)dx=\int_{-2}^{0}\left(2x^3+4x^2\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{2}+\frac{4x^3}{3}\right]_{-2}^{0}=0-\left(8-\frac{32}{3}\right)=\frac{32-24}{3}=\frac{8}{3}.$$

D'après a), les graphiques de f et g se coupent aux points d'abscisses -2 et 0 et entre ces deux valeurs $f(x)\geq g(x)$.

Donc $\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))\,dx=\frac{8}{3}$ est l'aire de la surface délimitée par les graphiques de f et g et les droites d'équations $x=-2$ et $x=0$.

PARTIE B		
QUESTION B2 ANALYSE	**Page 2/7**	**Barème**

Utiliser la calculatrice pour tous les calculs de cette question.

Sur une île dépourvue d'écureuils, on introduit quelques écureuils.

Un modèle mathématique de la croissance de la population d'écureuils sur l'île est donné par la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1320}{1 + e^{5,1 - 0,66\,x}}$$

où x est le temps, en années, écoulé depuis l'introduction.

a) Combien d'écureuils ont-ils été introduits sur l'île ? — **3 points**

$f(0) = \frac{1320}{1 + e^{5,1}} \approx 7,99894.$ On a introduit 8 écureuils sur l'île.

b) Combien d'écureuils vivent-ils sur l'île après 6 ans ? — **3 points**

$f(6) = \frac{1320}{1 + e^{5,1 - 0,66\cdot 6}} \approx 319,863.$ Après 6 ans, 320 écureuils vivent sur l'île.

c) Quand 720 écureuils vivront-ils sur l'île ? — **3 points**

$$f(x) = 720 \Leftrightarrow \frac{1320}{1 + e^{5,1 - 0,66\,x}} = 720 \Leftrightarrow 1 + e^{5,1 - 0,66\,x} = \frac{11}{6} \Leftrightarrow e^{5,1 - 0,66\,x} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow 5,1 - 0,66 \cdot x = \ln\left(\frac{5}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{5,1 - \ln\left(\frac{5}{6}\right)}{0,66} \approx 8,00352.$$

720 écureuils vivront sur l'île après 8 ans.

d) Le nombre 1320 apparaît dans le modèle.
Que révèle-t-il à propos de la population d'écureuils ? — **3 points**

$e^{5,1 - 0,66\,x} \to 0$ quand $x \to +\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1320}{1 + e^{5,1 - 0,66\,x}} = 1320.$

Ceci veut dire que le nombre d'écureuils sur l'île ne va pas croître à l'infini avec le temps. 1320 est la limite supérieure de ce nombre.

PARTIE B		
QUESTION B2 ANALYSE	**Page 3/7**	**Barème**
e) Un autre modèle décrit la population à l'aide de la fonction g donnée par $g(x)=18,5x^2-59x+8$. **Faites des observations sur les deux modèles. Lequel choisiriez-vous ? Expliquez votre réponse.** $g(0)=8$, $g(6)=320$ et $g(8)=720$. Donc le modèle g donne les mêmes réponses que le modèle f aux questions a), b) et c). Mais $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. Ceci veut dire qu'avec le modèle g, le nombre d'écureuils croît à l'infini avec le temps, ce qui n'est pas le cas avec le modèle f (voir d)). De plus, le graphique de g est une parabole qui coupe l'axe des abscisses en deux points ; $g(0)=8$ mais $g(1)<0$, ce qui signifie que le modèle g donne un nombre négatif d'écureuils au début ; en revanche, la fonction f est toujours positive. En conclusion, le modèle f est plus réaliste que le modèle g. L'observation des graphiques de f et g sur la calculatrice est encore plus éclairante (voir tns p.2 of 5).		**3 points**

<table>
<tr><td colspan="3">PARTIE B</td></tr>
<tr><td>QUESTION B3 PROBABILITÉS</td><td>Page 4/7</td><td>Barème</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Utiliser la calculatrice pour tous les calculs de cette question.

Lors d'une étude, une population est divisée en deux groupes A et B.

Pour le groupe A, le rythme cardiaque au repos, en pulsations par minute, est normalement distribué avec une moyenne de 80 et un écart-type de 10.

a) Calculer la probabilité (arrondie à la troisième décimale) qu'une personne choisie au hasard dans le groupe A ait un rythme cardiaque au repos compris entre 70 et 100.

Soit X_A, la variable aléatoire désignant le rythme cardiaque au repos d'une personne choisie au hasard dans le groupe A.
X_A suit une loi normale avec $\mu_A = 80$ et $\sigma_A = 10$.
À l'aide de la calculatrice (voir tns p.3 of 5), on obtient :
$P(70 \leq X_A \leq 100) \approx 0,818595 \approx 0,819$.

b) La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans le groupe A ait un rythme cardiaque au repos inférieur à k est de 0,16.
Calculer k.

De $P(X_A < k) = 0,16$, on déduit à l'aide de la calculatrice (voir tns p.3 of 5) que
$k \approx 70,0554 \approx 70$.

Pour le groupe B, le rythme cardiaque au repos, en pulsations par minute, est normalement distribué avec une moyenne de 50.
95% des personnes du groupe B ont un rythme cardiaque au repos compris entre 40 et 60.

c) Calculer l'écart-type des rythmes cardiaques dans le groupe B.

Soit X_B, la variable aléatoire désignant le rythme cardiaque au repos d'une personne choisie au hasard dans le groupe B.
X_B suit une loi normale avec $\mu_B = 80$ et $P(40 \leq X_B \leq 60) = 0,95$.
Or on sait que $P(\mu_B - 2\sigma_B \leq X_B \leq \mu_B + 2\sigma_B) = 0,95$. D'où $\sigma_B \approx 5$.
À l'aide de la calculatrice (voir tns p.3 of 5), on obtient : $\sigma_B \approx 5,10214$.
</td><td>
4 points

4 points

3 points
</td></tr>
</table>

PARTIE B		
QUESTION B3 PROBABILITÉS	**Page 5/7**	**Barème**
98% de la population appartiennent au groupe A, le reste au groupe B. **d) Calculer la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un rythme cardiaque au repos inférieur à 55. Utiliser la valeur $\sigma = 5$ pour l'écart-type dans le groupe B.** Soit X, la variable aléatoire désignant le rythme cardiaque au repos d'une personne choisie au hasard dans la population. On considère les événements : A : « La personne choisie appartient au groupe A », B : « La personne choisie appartient au groupe B ». $P(X<55) = P(A)\cdot P(X_{\mathrm{A}}<55) + P(B)\cdot P(X_{\mathrm{B}}<55)$. À l'aide de la calculatrice (voir tns p.3 of 5), on a $P(X_{\mathrm{A}}<55)\approx 0,00621$ et $P(X_{\mathrm{B}}<55)\approx 0,841345$. D'où $P(X<55)\approx 0,98\cdot 0,00621+0,02\cdot 0,841345\approx 0,022913\approx$ 0,023.		**2 points**
e) Calculer la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population appartienne au groupe B, étant donné que cette personne a un rythme cardiaque au repos inférieur à 55. $P(B\mid X<55) = \dfrac{P(B)\cdot P(X_{\mathrm{B}}<55)}{P(X<55)} \approx \dfrac{0,02\cdot 0,841345}{0,022913} \approx$ 0,734.		**2 points**

PARTIE B		
QUESTION B4 STATISTIQUES	**Page 6/7**	**Barème**

Utiliser la calculatrice pour tous les calculs de cette question.

Le tableau ci-dessous indique les résultats des mesures de la pression artérielle y de 8 hommes ainsi que leurs âges respectifs x en années.

Age x	**36**	**41**	**43**	**49**	**55**	**60**	**68**	**72**
Pression artérielle y	**118**	**125**	**140**	**145**	**155**	**155**	**152**	**160**

a) **Établir une équation de la droite de régression de y en x.** — **4 points**

En introduisant les données du tableau dans la calculatrice, on obtient immédiatement une équation de la droite de régression de y en x (voir tns p.4 of 5) :

$y = 1,03451x + 88,9209 \Leftrightarrow y \approx 1,03x + 88,92.$

b) **Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.** — **2 points**

On obtient en même temps le coefficient de corrélation linéaire entre x et y (voir tns p.4 of 5) : $r = 0,887136 \approx 0,89.$

c) **Établir une équation de la droite de Mayer pour les données du tableau.** — **4 points**

On partage la série statistique en deux sous-séries.
Le point moyen de la première sous-série a pour coordonnées :

$$\left(\frac{36+41+43+49}{4};\frac{118+125+140+145}{4}\right)=\left(\frac{169}{4};132\right)$$

Le point moyen de la deuxième sous-série a pour coordonnées :

$$\left(\frac{55+60+68+72}{4};\frac{155+155+152+160}{4}\right)=\left(\frac{255}{4};\frac{311}{2}\right).$$

La droite de Mayer passe par ces deux points moyens. Elle a pour équation :

$$y-132=\frac{\frac{311}{2}-132}{\frac{255}{4}-\frac{169}{4}}\left(x-\frac{169}{4}\right)\Leftrightarrow y=\frac{47}{43}\left(x-\frac{169}{4}\right)+132\Leftrightarrow y=\frac{47}{43}x+\frac{14761}{172}\Leftrightarrow$$

$y \approx 1,09x + 85,82.$

PARTIE B

QUESTION B5 STATISTIQUES	Page 7/7	Barème

Utiliser la calculatrice pour tous les calculs de cette question.

Dans un pays, le montant des recettes touristiques y, en millions d'€, est donné dans le tableau suivant, où x est le nombre d'années après 2005 :

Années x	0	1	2	3	4	5
Recettes touristiques	24495	26500	29401	33299	33675	34190

La fonction f définie par

$$f(x) = e^{10,13 + 0,07x}$$

est un modèle basé sur les données du tableau. Autrement dit, $f(x)$ estime le montant des recettes touristiques, en millions d'€, pour l'année $2005 + x$.

a) En utilisant ce modèle, calculer le montant des recettes touristiques pour 2017. — **3 points**

$f(12) = e^{10,13+0,07\cdot 12} \approx 58104,6.$

Le montant des recettes touristiques sera d'environ 58105 millions d'€, d'après ce modèle.

b) En utilisant ce modèle, déterminer l'année à partir de laquelle le montant des recettes touristiques dépassera 45000 millions d'€. — **3 points**

On résout l'inéquation

$$e^{10,13+0,07x} > 45000 \Leftrightarrow 10,13 + 0,07 \cdot x > \ln(45000) \Leftrightarrow x > \frac{\ln(45000) - 10,13}{0,07}$$

$$\Leftrightarrow x > 8,34883.$$

C'est donc à partir de l'année 2014 que, d'après ce modèle, le montant des recettes touristiques dépassera 45 millions d'€.

c) Déterminer un ajustement exponentiel de y en x en utilisant les données du tableau.
Comparer cette fonction avec la fonction f. — **4 points**

En introduisant les données du tableau dans la calculatrice, on obtient immédiatement l'ajustement exponentiel g de y en x défini par
$g(x) = 25090,2 \cdot (1,07437)^x$ (voir tns p.5 of 5).

En écrivant $f(x)$ sous la même forme que celle de $g(x)$:

$$f(x) = e^{10,13} \cdot \left(e^{0,07}\right)^x = 25084,4 \cdot \left(1,07251\right)^x \quad ,$$

on constate que $f(x)$ et $g(x)$ sont très proches.
L'observation des graphiques de f et g sur la calculatrice (voir tns p.5 of 5) est encore plus éclairante.