AIDE À LA CORRECTION

MATHÉMATIQUES 3 PÉRIODES
PARTIE B

DATE : 10 juin 2014, matin

DURÉE DE L'EXAMEN :
2 heures (120 minutes)

MATÉRIEL AUTORISÉ :
Examen avec support technologique

<table>
<tr><td colspan="3">PARTIE B</td></tr>
<tr><td>QUESTION B1 ANALYSE</td><td>Page 1/1</td><td>Barème</td></tr>
<tr><td colspan="2">La fonction f est définie par
$$f(x) = x^3 + ax^2 + x + b,$$
où a et b sont des nombres réels.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">a) Étant donné que $f(0) = -2$ et que $f'(1) = 0$, calculer les valeurs de a et b.

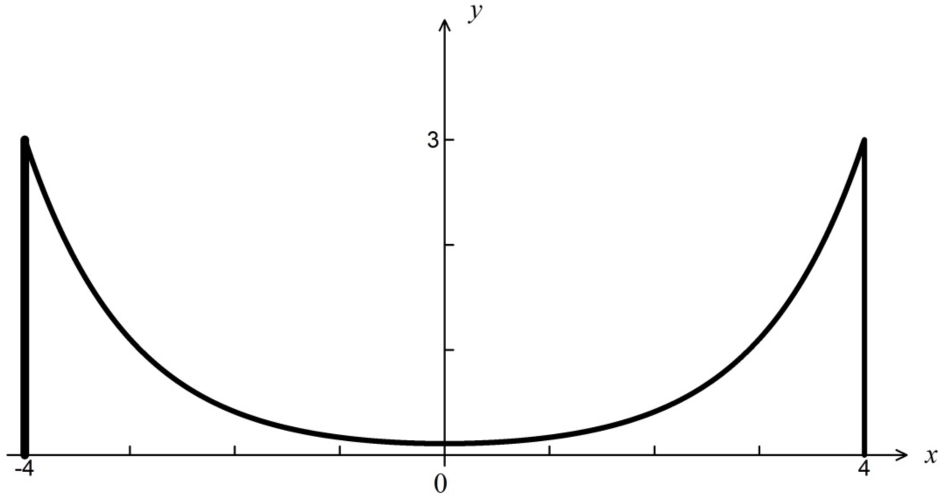
$f(0) = -2 \Leftrightarrow$ $b = -2$.
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1$. Donc $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $a = -2$.</td><td>3 points</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dans b) et c) soit $a = -2$ et $b = -2$.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">b) Calculer $\int_0^2 f(x)dx$.
Interpréter ce résultat en utilisant le graphique de f.

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$
$$\int_0^2 (x^3 - 2x^2 + x - 2)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^2 = 4 - \frac{16}{3} + 2 - 4 = -\frac{10}{3}.$$
Entre les abscisses 0 et 2, le graphique de f (voir tns p.1) est situé en-dessous de l'axe des abscisses et coupe celui-ci en $x = 2$.
Donc $\int_0^2 f(x)dx = -\frac{10}{3}$ est l'opposé de l'aire de la surface délimitée par le graphique de f et le système d'axes.</td><td>4 points</td></tr>
<tr><td colspan="2">c) La surface délimitée par le graphique de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_1$ et $x = x_2$ effectue une rotation autour de l'axe des abscisses.
Le volume V du solide de révolution ainsi engendré est donné par la formule :
$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} \left(f(x)\right)^2 dx.$$
Utiliser la calculatrice pour déterminer le volume V lorsque $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$.

$$V = \pi \int_0^2 (x^3 - 2x^2 + x - 2)^2 dx = \frac{632\pi}{105} \approx 18{,}9094.$$</td><td>3 points</td></tr>
</table>

PARTIE B		
QUESTION B2 ANALYSE	**Page 1/2**	**Barème**

Utiliser la calculatrice pour les calculs de a), c) et d).



Deux piquets de 3 m de haut sont situés à une distance de 8 m l'un de l'autre.
Une corde est suspendue par ses extrémités aux sommets des deux piquets.
La situation est montrée sur le diagramme ci-dessus.
La courbe correspondant à la forme prise par la corde a pour équation :

$$y = c\cdot(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}),$$

où c est un nombre réel.

a) Montrer que la valeur de c arrondie à la troisième décimale est égale à 0,055**.** Si $x=4,\ y=3$. Donc $c\cdot\left(\mathrm{e}^{4}+\mathrm{e}^{-4}\right)=3 \Leftrightarrow c=\dfrac{3}{\mathrm{e}^{4}+\mathrm{e}^{-4}} \approx 0{,}054928 \approx 0{,}055$.	**4 points**
b) Calculer la plus petite hauteur de la corde au-dessus du sol. La plus petite hauteur h de la corde au-dessus du sol est le minimum de la fonction définie par $f(x)=c\cdot(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$. Ce minimum est atteint en $x=0$ et $f(0)=2c\approx 0{,}11$. Donc la plus petite hauteur de la corde au-dessus du sol est d'environ 11cm.	**2 points**
c) Sur la corde, deux points se trouvent à 2 m au-dessus du sol. **Déterminer la distance entre ces deux points.** On calcule les abscisses des points d'ordonnée 2 de la courbe. À l'aide de la calculatrice (voir tns p.1), on résout l'équation $c\cdot(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})=2 \Leftrightarrow x\approx -3{,}59$ ou $x\approx 3{,}59$. Donc la distance entre les deux points est de 2 fois 3,59 , c'est-à-dire environ 7,19 m.	**4 points**

PARTIE B		
QUESTION B2 ANALYSE	**Page 2/2**	**Barème**
d) Quelle est la longueur de la corde ? **On peut utiliser la formule** $L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. 1°) En utilisant la formule donnée : $f'(x)=c\cdot\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)$ d'où $L=2\int_0^4 \sqrt{1+c^2\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)^2}\,dx \approx$ 10,8375 (en utilisant la valeur exacte de c) ou 10,8431 (en utilisant sa valeur approchée 0,055). 2°) En utilisant « arcLen », sur la calculatrice (voir tns p. 1), on obtient les mêmes résultats. La longueur de la corde est donc d'environ 10,8 m.		**5 points**

PARTIE B		
QUESTION B3 PROBABILITÉS	**Page 1/2**	**Barème**
Utiliser la calculatrice pour tous les calculs de cette question. **Une usine produit des puces électroniques.** **Chaque puce peut avoir deux défauts que l'on appelle défaut a et défaut b.** **On prélève une puce au hasard.** **On note A l'événement « la puce a le défaut a » et B l'événement « la puce a le défaut b ».** **On admet que ces deux événements A et B sont indépendants et que leurs probabilités sont $P(A)=0{,}02$ et $P(B)=0{,}01$.** **Une puce est dite défectueuse lorsqu'elle a au moins un des deux défauts.**		
a) Calculer la probabilité que la puce prélevée ne soit pas défectueuse. Soit D l'événement « la puce est défectueuse ». $P(\bar{D}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0{,}98 \cdot 0{,}99 = 0{,}9702$.		**3 points**
b) Étant donné que la puce prélevée est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle ait les deux défauts. $P(A \cap B \mid D) = \dfrac{P(A \cap B \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(D)}$ (car $A \cap B \subset D$). $P(A \cap B \mid D) = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{1 - P(\bar{D})} = \dfrac{0{,}02 \cdot 0{,}01}{0{,}0298} = 0{,}006711$.		**3 points**
Supposons maintenant que la probabilité que n'importe quelle puce de la production ne soit pas défectueuse est de 0,97.		
c) On prélève au hasard 100 puces dans la production. **Calculer la probabilité qu'au moins 95 puces ne soient pas défectueuses.** Soit X le nombre de puces non défectueuses parmi les 100. X suit une loi binomiale avec n =100 et p = 0,97. À l'aide de la calculatrice (voir tns p.2) en faisant binomCdf(100,0.97,95,100), on trouve $P(X \geq 95) \approx 0{,}919163$.		**3 points**

PARTIE B		
QUESTION B3 PROBABILITÉS	**Page 2/2**	**Barème**
d) **Un client commande un certain nombre de puces. Il souhaite que la probabilité qu'il y ait au moins 50 puces non défectueuses soit supérieure à 0,995.**		
Une commande de 52 puces sera-t-elle suffisante ? Déterminer le nombre minimum de puces qu'il doit commander. Soit n le nombre de puces que le client commande et Y le nombre de puces non défectueuses parmi les n. Y suit une loi binomiale avec n inconnu et $p = 0{,}97$. Il faut trouver n minimum tel que $P(Y \geq 50) > 0{,}995$. Si $n = 52$, à l'aide de la calculatrice, en faisant binomCdf(52,0.97,50,52), on trouve $P(Y \geq 50) \approx 0{,}75393 < 0{,}995$. Une commande de 52 puces n'est donc pas suffisante. On essaie alors avec n plus grand (voir tns p. 2) et on trouve que $n_{\min} = 56$.		**3 points**
e) **On admet que le poids des puces produites suit une loi normale de moyenne 500 mg et d'écart-type 4 mg.** **Calculer le pourcentage de puces dont le poids est compris entre 490 mg et 510 mg.** Soit Z le poids en mg d'une puce prélevée au hasard. Z suit une loi normale avec $\mu = 500$ et $\sigma = 4$. À l'aide de la calculatrice, en faisant normCdf(490,510,500,4) (voir tns p. 2), on trouve : $P(490 \leq Z \leq 510) \approx 0{,}987581$. Dès lors, environ 99 % des puces ont un poids compris entre 490 mg et 510 mg.		**3 points**

PARTIE B		
QUESTION B4 STATISTIQUES	**Page 1/2**	**Barème**

Utiliser la calculatrice pour tous les calculs de cette question.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la production annuelle de poissons d'une ferme aquacole.

Année	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**
Rang de l'année x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Nombre de tonnes produites y	**65**	**76**	**119**	**162**	**260**	**505**

a) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x. — **4 points**

À l'aide de la calculatrice (voir tns p.2), on trouve :
$y = 79{,}9x - 81{,}7.$

b) On pose $z = \ln(y)$.
Reproduire et compléter le tableau suivant. — **3 points**

Rang de l'année x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
z						

x	1	2	3	4	5	6
z	4,17439	4,33073	4,77912	5,0876	5,56068	6,22456

c) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x. — **3 points**

À l'aide de la calculatrice (voir tns p.3), on trouve :
$z = 0{,}4x + 3{,}6.$

d) En déduire une expression de y en fonction de x. — **3 points**

$z = \ln y \Leftrightarrow y = e^z$. Donc $y = e^{0{,}4x+3{,}6} \Leftrightarrow y = 36{,}6 \cdot (1{,}5)^x$. (voir tns p.3).

PARTIE B		
QUESTION B4 STATISTIQUES	**Page 2/2**	**Barème**
e) **En utilisant les deux modèles, calculer le nombre de tonnes de poissons prévu pour 2014.** En 2014, $x = 7$. Modèle linéaire : $y = 79{,}9 \cdot 7 - 81{,}7 \approx$ 477 tonnes. Modèle exponentiel : $y = 36{,}6 \cdot (1{,}5)^7 \approx$ 633 tonnes. (voir tns p. 3).		**2 points**
f) **Utiliser le meilleur des deux modèles pour prévoir en quelle année la production annuelle dépassera 3000 tonnes. Justifier le choix du modèle.** Le meilleur des deux modèles est le modèle exponentiel (voir tns p. 3). À l'aide de la calculatrice (voir tns p. 3), on résout l'équation $36{,}6 \cdot (1{,}5)^x > 3000 \Leftrightarrow x > 10{,}8202$. Donc la production dépassera 3000 tonnes à partir de $x = 11$, c'est-à-dire en 2018.		**5 points**