AIDE À LA CORRECTION

MATHÉMATIQUES 3 PÉRIODES
PARTIE B

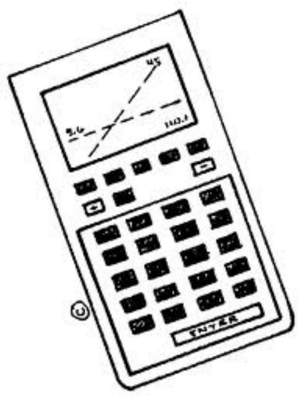
DATE : 8 juin 2015, matin

DURÉE DE L'EXAMEN :

2 heures (120 minutes)

MATÉRIEL AUTORISÉ :

Examen avec support technologique



PARTIE B

QUESTION B1 ANALYSE	**Page 1/1**	**Barème**
Les fonctions f et g sont définies par $f(x)=0{,}75x^3-1{,}25x^2-1$ et $g(x)=x^2-1$.		
a) Tracer les graphiques des fonctions f et g sur le même diagramme. Calculer les coordonnées des points d'intersection de leurs graphiques. Graphiques : voir tns p.1 of 4. Points d'intersection des graphiques : On résout l'équation : $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 0{,}75x^3-2{,}25x^2=0$ $\Leftrightarrow 0{,}75x^2(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=3$. $f(0)=g(0)=-1$ et $f(3)=g(3)=8$. Les points d'intersection des graphiques de f et g ont pour coordonnées : $(0;-1)$ et $(3;8)$.		**4 points**
b) Calculer $\int_0^3 \left(g(x)-f(x)\right)dx$. Interpréter ce résultat en utilisant le diagramme. $\int_0^3 \left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_0^3 \left(2{,}25x^2-0{,}75x^3\right)dx=0{,}75\left[x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^3$ $=\frac{3}{4}\cdot\frac{108-81}{4}=\frac{81}{16}=5{,}0625.$ L'aire de la surface délimitée par les graphiques de f et g pour $0\le x\le 3$ est égale à 5,0625 (unités d'aire).		**4 points**
La longueur L d'un arc de la courbe représentative de la fonction f entre les abscisses a et b est donnée par la formule $L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$ **c) Utiliser la calculatrice pour déterminer L lorsque $a=0$ et $b=3$.** $f'(x)=2{,}25x^2-2{,}5x.$ À l'aide de la calculatrice : $L=\int_0^3 \sqrt{1+\left(2{,}25x^2-2{,}5x\right)^2}\,dx \approx 11{,}1663.$ Autres méthodes avec la calculatrice : voir tns p.1 of 4.		**2 points**

PARTIE B		
QUESTION B2 ANALYSE	**Page 1/1**	**Barème**
Utiliser la calculatrice pour les calculs de a), c), d) et e). **À 22h00, la température d'une pièce est de 20°C.** **À cette heure, on éteint le chauffage dans la pièce.** **La température $f(t)$ de la pièce après 22h00 est donnée par** $f(t) = 9\mathrm{e}^{-0,12t} + 11$ **où t est le nombre d'heures après 22h00 et $f(t)$ est exprimée en °C.** **a) Calculer la température à minuit et à 7h00 le lendemain matin.** Température à minuit : $f(2) = 9\,\mathrm{e}^{-0,12\cdot 2} + 11 \approx 18,0797\,(°\mathrm{C})$. Température à 7h00 le lendemain matin : $f(9) = 9\,\mathrm{e}^{-0,12\cdot 9} + 11 \approx 14,0564\,(°\mathrm{C})$.		**3 points**
b) Déterminer $f'(t)$ et démontrer que f est une fonction décroissante. $f'(t) = -1,08\,\mathrm{e}^{-0,12t}$. Quel que soit t, $f'(t) < 0$. Donc f est décroissante.		**3 points**
c) Déterminer $f'(2)$. **Que nous révèle ce résultat à propos de la température de la pièce ?** $f'(2) = -1,08\,\mathrm{e}^{-0,12\cdot 2} \approx -0,849558$. Cela signifie qu'à minuit ($t = 2$), la température de la pièce diminue d'environ 0,85°C par heure.		**3 points**
d) À quelle heure de la matinée la température tombera-t-elle sous 15°C ? On résout $f(t) < 15 \Leftrightarrow 9\,\mathrm{e}^{-0,12t} + 11 < 15 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,12t} < \frac{4}{9}$ $\Leftrightarrow t > -\frac{1}{0,12}\ln\left(\frac{4}{9}\right) \approx 6,75775.$ La température deviendra inférieure à 15°C à 4h46 du matin.		**3 points**
L'énergie (en kWh) dissipée à l'extérieur de la pièce entre t_1 et t_2 est donnée par $\int_{t_1}^{t_2} 0,70 \cdot \mathrm{e}^{-0,12t}\, dt$. **e) Calculer l'énergie dissipée à l'extérieur de la pièce de 22h00 à 7h00 le lendemain matin.** On calcule l'énergie dissipée à l'extérieur de la pièce entre $t_1 = 0$ et $t_2 = 9$: $\int_0^9 0,7\,\mathrm{e}^{-0,12t}\, dt = \frac{35}{6}\left(\mathrm{e}^{-0,12\cdot 9} - 1\right) \approx 3,85236$ (kWh).		**3 points**

PARTIE B		
QUESTION B3 PROBABILITÉS	**Page 1/2**	**Barème**
Utiliser la calculatrice pour les calculs de b) et c). **Dans une cantine scolaire, on propose trois menus (poisson, viande, végétarien).** **La probabilité qu'un élève choisisse le menu végétarien est de 0,20.** **Un jour donné, on a préparé 28 menus végétariens.** **Ce jour-là, 120 élèves mangent à la cantine.** **a) Déterminer l'espérance mathématique du nombre de menus végétariens choisis.** Soit X le nombre de menus végétariens choisis. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0,20$. $E(X) = n \cdot p = 120 \cdot 0,2 = 24$.		**2 points**
b) Calculer la probabilité qu'on ait préparé suffisamment de menus végétariens. À l'aide de la calculatrice $\left(\text{voir tns p. 2 of 4}\right)$: $P(X \leq 28) \approx 0,847703$.		**3 points**
c) Calculer le nombre de menus végétariens qu'il aurait fallu préparer de telle sorte que la probabilité qu'on en ait préparé suffisamment soit d'au moins 0,98. D'après le b), on sait que la préparation de 28 plats végétariens n'est pas suffisante. On essaie un plus grand nombre avec la calculatrice (voir tns p. 2 of 4) et on déduit qu'il faut préparer au moins 33 menus végétariens pour que la probabilité d'en avoir préparé suffisamment soit supérieure ou égale à 0,98.		**4 points**

PARTIE B		
QUESTION B3 PROBABILITÉS	**Page 2/2**	**Barème**
Dans une grande cantine universitaire, on propose trois menus (poisson, viande, végétarien). **Le nombre de menus poisson choisis par jour suit une distribution normale de moyenne $\mu = 240$.** **Pour 95 % des jours, le nombre de menus poisson choisis est compris entre 200 et 280.** **d) Calculer l'écart-type du nombre de menus poisson choisis par jour.** Soit Y le nombre de menus poisson choisis. Y suit une loi normale de moyenne $\mu = 240$ et d'écart-type σ inconnu. 1°) On sait que $P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$ et on donne $P(200 \leq Y \leq 280) = 0{,}95$. Donc $4\sigma \approx 80 \Leftrightarrow \sigma \approx 20$. 2°) À l'aide de la calculatrice, on résout une équation d'inconnue σ (voir tns p. 2 of 4) et on obtient : $\sigma \approx 20{,}4086$.		**3 points**
e) Utiliser un écart-type de $\sigma = 20$. **Est-il réaliste de supposer qu'un jour plus de 320 menus poisson soient choisis ?** 1°) On sait que $P(Y > \mu + 3\sigma) \approx 0$. Or $320 > \mu + 3\sigma = 240 + 60 = 300$. Donc $P(Y > 320) \approx 0$. 2°) À l'aide de la calculatrice (voir tns p. 2 of 4) : $P(Y > 320) \approx 0{,}000032$. Par conséquent il y a très peu de chance qu'un jour plus de 320 menus poisson soient choisis.		**3 points**

PARTIE B		
QUESTION B4 STATISTIQUES	**Page 1/2**	**Barème**

Utiliser la calculatrice pour tous les calculs de cette question.

On mesure tous les 5 ans le taux de cholestérol, dans le sang, d'un patient.
Le tableau ci-dessous montre les lectures de cholestérol d'un patient particulier depuis ses 15 ans jusqu'à ses 50 ans.
On donne le taux de cholestérol dans les unités de mmol/L.

Age	**15**	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**
Cholestérol	**3,70**	**4,32**	**4,39**	**4,73**	**3,10**	**4,69**	**5,41**	**5,14**

a) Dessiner un nuage de points pour représenter les données du tableau. — **2 points**

On utilise la calculatrice : voir tns p.2 of 4.

b) Déterminer le coefficient de corrélation et une équation de la droite de régression.
Ajouter la droite de régression au nuage de points. — **4 points**

On utilise la calculatrice (voir tns p. 2,3 of 4) qui donne le coefficient de corrélation $r \approx 0{,}575$, une équation de la droite de régression $y \approx 0{,}035x + 3{,}290$ ainsi que le graphique de celle-ci.

Les points du nuage qui sont situés à plus de 0,90 mmol/L au-dessus ou en dessous de la droite de régression sont considérés, dans ce cas, comme aberrants.

c) Y a-t-il des points aberrants ? Expliquer la réponse. — **3 points**

À l'aide de la calculatrice (voir tns p. 3 of 4), on détermine graphiquement un seul point aberrant, celui correspondant à l'observation d'un taux de cholestérol de 3,10 mmol/L à l'âge de 35 ans.
Vérification par calcul : le point correspondant au point de coordonnées $(35\ ;\ 3{,}10)$ du nuage, sur la droite de régression, a pour ordonnée :
$y \approx 0{,}035 \cdot 35 + 3{,}290 \approx 4{,}52.$ Le point $(35\ ;\ 3{,}10)$ se trouve donc à environ 1,42 mmol/L (donc à plus de 0,90 mmol/L) en dessous de la droite de régression.

PARTIE B		
QUESTION B4 STATISTIQUES	**Page 2/2**	**Barème**
d) **On décide d'ignorer le point du nuage correspondant à l'âge de 35 ans et ensuite, de répéter l'analyse des données.** **En omettant ce point, déterminer le nouveau coefficient de corrélation et une équation de la nouvelle droite de régression .** **Ajouter cette nouvelle droite de régression au diagramme.** On utilise la calculatrice (voir tns p. 3 of 4) qui donne le nouveau coefficient de corrélation $r' \approx 0{,}917$, une équation de la nouvelle droite de régression $y \approx 0{,}039x + 3{,}368$ ainsi que le graphique de celle-ci.		**5 points**
e) **Utiliser chacune des deux droites de régression pour prévoir le taux de cholestérol du patient à l'âge de 55 ans.** 1ère droite de régression : $y \approx 0{,}035x + 3{,}290$. Taux de cholestérol à 55 ans $\approx 0{,}035 \cdot 55 + 3{,}290 \approx 5{,}22$ (mmol/L) (5,23 en utilisant plus de décimales). 2ème droite de régression : $y \approx 0{,}039x + 3{,}368$. Taux de cholestérol à 55 ans $\approx 0{,}039 \cdot 55 + 3{,}368 \approx 5{,}51$ (mmol/L) (5,52 en utilisant plus de décimales).		**2 points**
f) **Si son taux de cholestérol atteint 6,0 mmol/L, le patient devrait commencer à suivre un traitement médical.** **Utiliser chacune des deux droites de régression pour prévoir à quel âge le patient devrait commencer à suivre son traitement.** 1ère droite de régression : $y \approx 0{,}035x + 3{,}290$. On résout : $0{,}035x + 3{,}290 \approx 6 \Leftrightarrow x \approx \dfrac{2{,}71}{0{,}035} \approx 77{,}4$ (ans) (76,9 en utilisant plus de décimales). 2ème droite de régression : $y \approx 0{,}039x + 3{,}368$. On résout : $0{,}039x + 3{,}368 \approx 6 \Leftrightarrow x \approx \dfrac{2{,}632}{0{,}039} \approx 67{,}5$ (ans) (67,3 en utilisant plus de décimales). Selon le premier modèle, le patient devrait commencer son traitement à 77 ans, et selon le second, à 67 ans.		**4 points**