AIDE À LA CORRECTION

MATHÉMATIQUES 3 PÉRIODES
PARTIE B

DATE : 6 juin 2016, matin

DURÉE DE L'EXAMEN :

2 heures (120 minutes)

MATÉRIEL AUTORISÉ :

Examen avec support technologique :
Calculatrice TI-Nspire en mode « Press-to-test »

Crayon pour les graphiques

REMARQUES PARTICULIÈRES :

- Utiliser une page différente pour chaque question.
- Il est indispensable que les réponses soient accompagnées des explications nécessaires à leur élaboration.
- Les réponses doivent mettre en évidence le raisonnement qui amène aux résultats ou solutions.
- Lorsque des graphes sont utilisés pour trouver une solution, la réponse doit inclure des esquisses de ceux-ci.
- Sauf indication contraire dans la question, la totalité des points ne pourra être attribuée à une réponse correcte en l'absence du raisonnement et des explications qui permettent d'arriver aux résultats ou solutions.
- Lorsqu'une réponse est incorrecte, une partie des points pourra cependant être attribuée lorsqu'une méthode appropriée et/ou une approche correcte ont été utilisées.

PARTIE B		
QUESTION B1 ANALYSE	**Page 1/1**	**Barème**

Les fonctions f et g sont définies par

$$f(x) = -x^2 + 4x + 5 \text{ et } g(x) = -x + 5.$$

a) Tracer les graphiques de f et g sur le même diagramme. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des graphiques de f et g. — **4 points**

Graphiques : voir tns.
Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection des graphiques de *f* et *g*, on résout l'équation

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 = -x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 5$.

$f(0) = g(0) = 5$ et $f(5) = g(5) = 0$.

Les points d'intersection des graphiques de *f* et *g* ont pour coordonnées : (0 ; 5) et (5 ; 0).

b) Déterminer les coordonnées du point où la tangente au graphique de f est parallèle au graphique de g. Établir dès lors une équation de cette tangente. — **4 points**

Le graphique de la fonction *g* est une droite de coefficient directeur -1.

Il faut résoudre l'équation $f'(x) = -1 \Leftrightarrow -2x + 4 = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} + 10 + 5 = \frac{35}{4}.$$

Le point où la tangente au graphique de *f* est parallèle au graphique de *g* a pour coordonnées $\left(\dfrac{5}{2} ; \dfrac{35}{4}\right)$.

Cette tangente a pour équation : $y - \dfrac{35}{4} = -\left(x - \dfrac{5}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x + \dfrac{45}{4}$.

L'aire A de la surface délimitée par les graphiques de deux fonctions f et g entre les abscisses a et b est donnée par :

$$A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx.$$

c) Calculer l'aire de la surface délimitée par les graphiques de f et g. — **2 points**

Le graphique de *f* est au-dessus de celui de *g*. Donc

$$A = \int_0^5 \left[(-x^2 + 4x + 5) - (-x + 5)\right] dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2}\right]_0^5$$

$$= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{125}{6}.$$

Q1−Math3p−2016

$\mathbf{f}(x):=-x^2+4\cdot x+5$ ▸ *Done*

$\mathbf{g}(x):=-x+5$ ▸ *Done*

a) Points of intersection

$\text{solve}(\mathbf{f}(x)=\mathbf{g}(x),x)$ ▸ $x=0$ or $x=5$

Points (0, 5) and (5,0)

b)

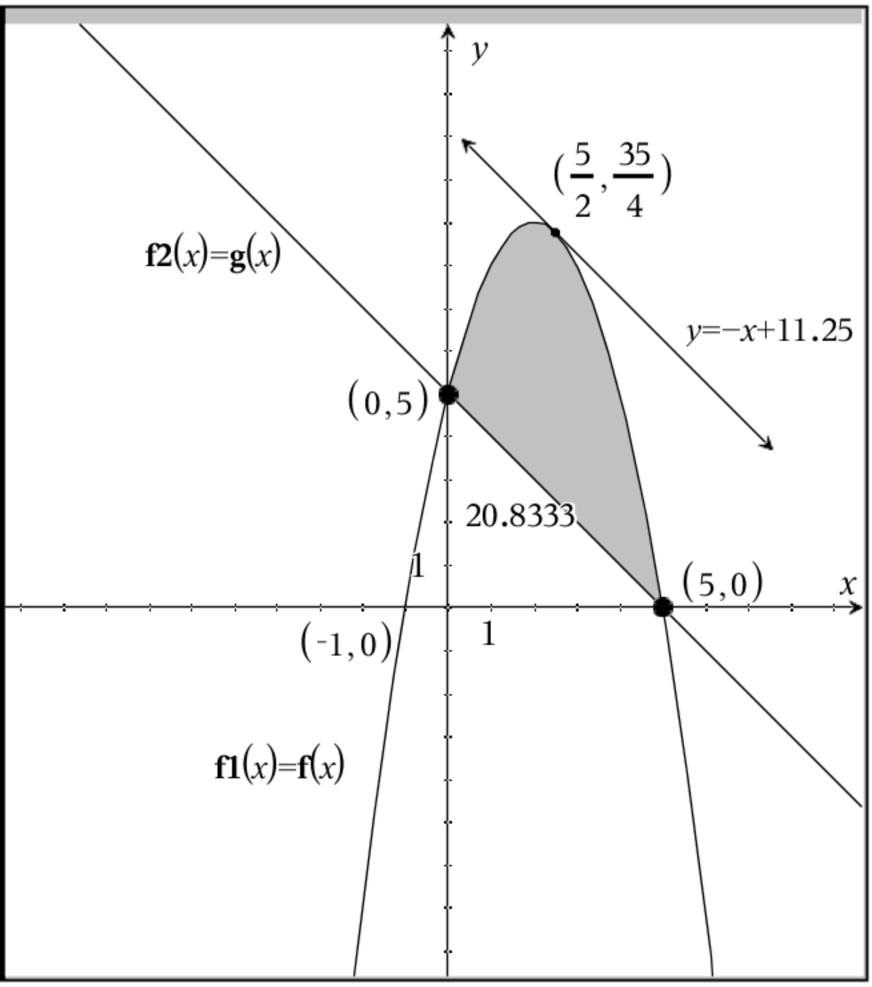
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))=-1,x\right)$ ▸ $x=\frac{5}{2}$

point $\left(\frac{5}{2},\mathbf{f}\left(\frac{5}{2}\right)\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{35}{4}\right)$

$y=\text{tangentLine}\left(\mathbf{f}(x),x,\frac{5}{2}\right)$ ▸ $y=\frac{45}{4}-x$

c) Area between the graphs

$$\int_0^5 (\mathbf{f}(x)-\mathbf{g}(x))\,dx=\frac{125}{6}\approx 20.83$$



PARTIE B		
QUESTION B2 ANALYSE	**Page 1/2**	**Barème**

Utiliser la calculatrice pour a) et e).

La hauteur d'une montgolfière au-dessus du sol est donnée par la fonction h définie par

$$h(t) = 2t^4 - 6t^3 + 4{,}5t^2 ,$$

où t est le temps en heures et $h(t)$ est la hauteur en kilomètres.

La montgolfière décolle à l'instant $t = 0$.
Le vol se termine lorsque la montgolfière se pose à nouveau sur le sol.
On peut supposer que la montgolfière survole un paysage totalement plat.

a) Calculer la hauteur de la montgolfière 1 heure après le décollage. Tracer le graphique de h. — **4 points**

$h(1) = 2 - 6 + 4{,}5 = 0{,}5$.
1 heure après le décollage, la montgolfière est à 0,5 km du sol.
Graphique : voir tns.

b) A quel instant la montgolfière se pose-t-elle à nouveau sur le sol ? — **3 points**

On résout l'équation $2t^4 - 6t^3 + 4{,}5t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2(2t^2 - 6t + 4{,}5) = 0 \Leftrightarrow$
$t^2 = 0$ ou $2t^2 - 6t + 4{,}5 = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $2(t-1{,}5)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 1{,}5$.
$t = 0$ est l'instant du décollage. $t = 1{,}5$ est l'instant de l'atterrissage.
La montgolfière se pose à nouveau sur le sol une heure et demie après le décollage.

c) Quelle est la hauteur maximale atteinte ? — **2 points**

$h'(t) = 8t^3 - 18t^2 + 9t = t(8t^2 - 18t + 9)$.

$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \dfrac{9 \pm 3}{8} \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \dfrac{3}{2}$ ou $t = \dfrac{3}{4}$.

$h\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{9}{16}\left(2 \cdot \dfrac{9}{16} - 6 \cdot \dfrac{3}{4} + \dfrac{9}{2}\right) = \dfrac{81}{128} \approx 0{,}633$.

Tableau de variations :

t	0		0,75		1,5
$h'(t)$	0	+	0	–	0
h	0	↗	0,633	↘	0

La hauteur maximale atteinte est donc d'environ 0,633 km ou 633 m.

PARTIE B		
QUESTION B2 ANALYSE	**Page 2/2**	**Barème**

d) Calculer $h'(0{,}50)$.
Que révèle ce résultat à propos de l'ascension de la montgolfière ? — **3 points**

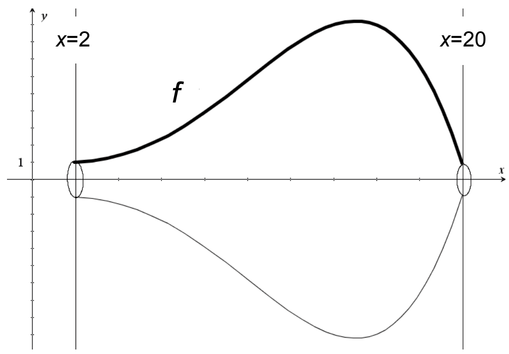
$$h'\left(\frac{1}{2}\right) = 8\cdot\frac{1}{8} - 18\cdot\frac{1}{4} + \frac{9}{2} = 1.$$

Ceci signifie que, une demi-heure après le décollage, la vitesse d'ascension de la montgolfière est de 1 km/h.

Une forme approximative de la montgolfière est engendrée par la rotation autour de l'axe des abscisses du graphique d'une fonction f **définie par**

$$f(x) = -0{,}0005x^4 + 0{,}01x^3 + 0{,}001x^2 - 0{,}03x + 1,\quad 2 \le x \le 20.$$

Voir le diagramme ci-dessous.
x **et** y **sont mesurés en mètres.**



e) Calculer le volume V **de la montgolfière en utilisant la formule** — **3 points**

$$V = \pi\cdot\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx.$$

À l'aide de la calculatrice :

$$V = \pi\int_2^{20}(-0{,}0005x^4 + 0{,}01x^3 + 0{,}001x^2 - 0{,}03x + 1)^2\,dx \approx 2030{,}81.$$

Le volume de la montgolfière est donc d'environ $2031\,\mathrm{m}^3$.

Q2−Math3p−2016

$\mathbf{h}(t):=2\cdot t^4-6.\cdot t^3+4.5\cdot t^2$ ▸ *Done*

a) $\mathbf{h}(1)=0.5$ **Height 0.5 km after 1 hour.**

b) solve$(\mathbf{h}(t)=0,t)|t>0$ ▸ $t=1.5$.

Hence: The balloon reaches the ground

1.5 hours after take−off.

c)

Maximum height 0.63 km, see graph, or

fMax$(\mathbf{h}(t),t)|0\leq t\leq 1.5$ ▸ $t=0.75$

$\mathbf{h}(0.75)=0.632813$ or use the derivative

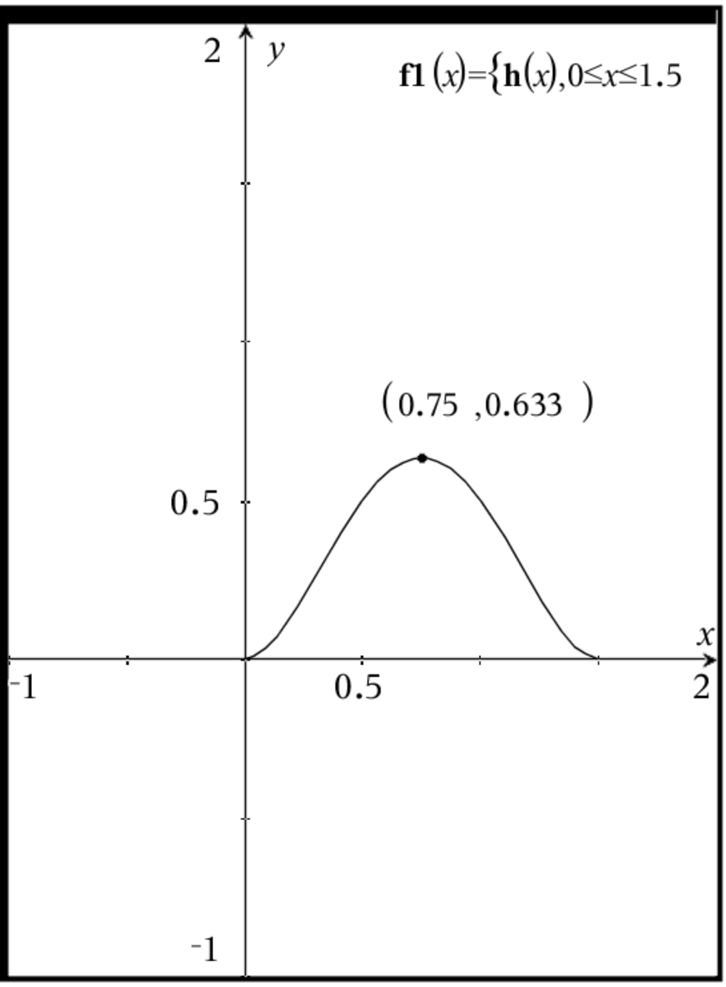
$\mathbf{hp}(t):=\frac{d}{dt}(\mathbf{h}(t))$ ▸ *Done*

solve$(\mathbf{hp}(t)=0,t)|0<t<1.5$ ▸ $t=0.75$

d)

$\mathbf{hp}(0.5)=1.$, i.e. $\boldsymbol{h'}\mathbf{(0.5)=1.0}$

At t = 0.5 h the balloon's height increases by 1.0 km per hour.



Q2−Math3p−2016 (cont.)

e)

$\mathbf{g}(x):=^-5.\text{E}^-4\cdot x^4+0.01\cdot x^3+0.001\cdot x^2-0.03\cdot x+1$ ▸ *Done*

$$\pi\cdot\int_2^{20}(\mathbf{g}(x))^2\,dx=2031.$$

i.e. the volume of the balloon is 2031 m³.

PARTIE B		
QUESTION B3 PROBABILITÉS	**Page 1/2**	**Barème**
Utiliser la calculatrice pour tous les calculs de cette question. **Dans une maison de campagne où vivent des chats domestiques, la probabilité qu'un chat mange du poisson le soir est de** 0,15**.** **Si un chat mange du poisson le soir, la probabilité qu'il chasse des souris pendant la nuit est de** 0,12**.** **Si un chat ne mange pas de poisson le soir, la probabilité qu'il chasse des souris pendant la nuit est de** 0,80**.** **a) Montrer que la probabilité qu'un chat chasse des souris pendant la nuit est de** 0,698**.** On considère les événements : F : « Le chat mange du poisson le soir » et M : « Le chat chasse des souris pendant la nuit ». On sait que $P(F)=0{,}15$, $P(M\|F)=0{,}12$ et $P(M\|\bar{F})=0{,}80$. $P(M)=P(F)\cdot P(M\|F)+P(\bar{F})\cdot P(M\|\bar{F})=0{,}15\cdot 0{,}12+0{,}85\cdot 0{,}80=0{,}698$.		**3 points**
b) Étant donné qu'un chat a chassé des souris pendant la nuit, calculer la probabilité qu'il ait mangé du poisson le soir. $P(F\|M)=\dfrac{P(F\cap M)}{P(M)}=\dfrac{P(F)\cdot P(M\|F)}{P(M)}=\dfrac{0{,}15\cdot 0{,}12}{0{,}698}\approx 0{,}026$.		**3 points**
Les souris tentent de s'échapper. **La probabilité qu'une souris réussisse à s'échapper est de** 0,85**.** **Une certaine nuit,** 100 **souris tentent de s'échapper.** **c) Calculer la probabilité qu'au moins** 90 **souris réussissent à s'échapper.** Soit X le nombre de souris, parmi les 100, qui réussissent à s'échapper. X suit une loi binomiale avec $n=100$ et $p=0{,}85$. $P(X\geq 90)=\sum_{k=90}^{100} C_{100}^{k}\,0{,}85^{k}\,0{,}15^{100-k}$. À l'aide de la calculatrice, on trouve : $P(X\geq 90)\approx 0{,}099$.		**3 points**

PARTIE B		
QUESTION B3 PROBABILITÉS	**Page 2/2**	**Barème**
Une souris femelle va bientôt donner naissance à des petits souriceaux. **On sait que la masse (appelée communément « poids ») d'un souriceau à la naissance suit une loi normale de moyenne** $\mu = 1{,}1$ g **et d'écart-type** $\sigma = 0{,}3$ g. **d) Calculer la probabilité que la masse d'un souriceau à la naissance soit inférieure à** 1,0 g**.** Soit W la masse en grammes d'un souriceau à la naissance. W suit une loi normale de paramètres $\mu = 1{,}1$ et $\sigma = 0{,}3$. À l'aide de la calculatrice, on trouve $P(W < 1) \approx 0{,}369$.		**3 points**
e) La probabilité que la masse d'un souriceau à la naissance soit inférieure à x **grammes est de** 0,75**.** **Calculer** x**.** Il faut déterminer x tel que $P(W \leq x) = 0{,}75$. À l'aide de la calculatrice, on trouve $x \approx 1{,}30$ g.		**3 points**

Q3−Math3p−2016

a) P(chase mice) = $0.15 \cdot 0.12 + 0.85 \cdot 0.8 =$ **0.698**

b) P(fish|chase) = $\dfrac{0.15 \cdot 0.12}{0.698} = 0.025788 \approx$ **0.026**

c) n=100, p=0.85

$P(X \geq 90) = \text{binomCdf}(100,0.85,90,100) = 0.099447 \approx$ **0.099**

d) $\mu=1.1$ and $\sigma=0.3$

$P(\text{weight}<1.0 \text{ g}) = \text{normCdf}(0,1.,1.1,0.3) = 0.369319 \approx$ **0.369**

e) Two methods:

$\text{invNorm}(0.75,1.1,0.3) = 1.30235$

or

$\text{solve}(\text{normCdf}(-\infty,x,1.1,0.3)=0.75,x) \blacktriangleright x=1.30235 \approx$ **1.30**

i.e. **probability of weight < 1.30 g is 0.75.**

PARTIE B		
QUESTION B4 STATISTIQUES	**Page 1/2**	**Barème**

Utiliser la calculatrice pour les calculs de b), c), d) et e).

Le tableau ci-dessous montre, de mai à septembre 2014, quel est le nombre total de personnes infectées par le virus Ebola. Les données sont enregistrées le 1er de chaque mois.

Mois		**mai**	**juin**	**juil.**	**août**	**sept.**
Temps en mois après le 1er mai	x	0	1	2	3	4
Nombre total de cas d'Ebola	y	242	419	759	1603	3707

Source : Organisation Mondiale de la Santé.

a) Tracer un graphique en nuage de points représentant les données du tableau. — **3 points**

Voir tns.

b) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire. — **3 points**

Voir tns.

Pour c), d) et e), utiliser les modèles :

Modèle linéaire : $y = 811x - 277$

Modèle exponentiel : $y = 219 \cdot (1{,}97)^x$.

c) Ajouter la droite de régression et le graphique de la fonction exponentielle de régression au diagramme de a). — **5 points**

Voir tns.

d) En utilisant le modèle exponentiel, déterminer quand le nombre total de personnes infectées par le virus atteindra 50 000**.** — **4 points**

On résout l'équation $219 \cdot 1{,}97^x = 50000 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\left(\dfrac{50000}{219}\right)}{\ln(1{,}97)} \approx 8{,}0$.

Il y aura donc 50 000 personnes infectées par le virus 8,0 mois après le 1er mai 2014, c'est-à-dire le 1er janvier 2015.

PARTIE B		
QUESTION B4 STATISTIQUES	**Page 2/2**	**Barème**
L'Organisation Mondiale de la Santé a enregistré 13 567 **cas d'Ebola le 1er novembre 2014.** **e) En utilisant chacun des deux modèles, estimer le nombre total de personnes qui seront atteintes par le virus le 1er novembre 2014 et commenter ces deux valeurs par comparaison à la valeur enregistrée de** 13 567**.** Au 1er novembre 2014 : $x = 6$. En utilisant le modèle linéaire : $y = 811 \cdot 6 - 277 = 4589$. En utilisant le modèle exponentiel : $y = 219 \cdot 1{,}97^6 \approx 12801$. Le nombre total de cas d'Ebola prédit par le modèle exponentiel (12801) est nettement plus proche de la valeur enregistrée de 13567 que celui prédit par le modèle linéaire (4589). Le modèle linéaire n'est pas du tout valable ; le modèle exponentiel est meilleur.		**5 points**

Q4−Math3p−2016

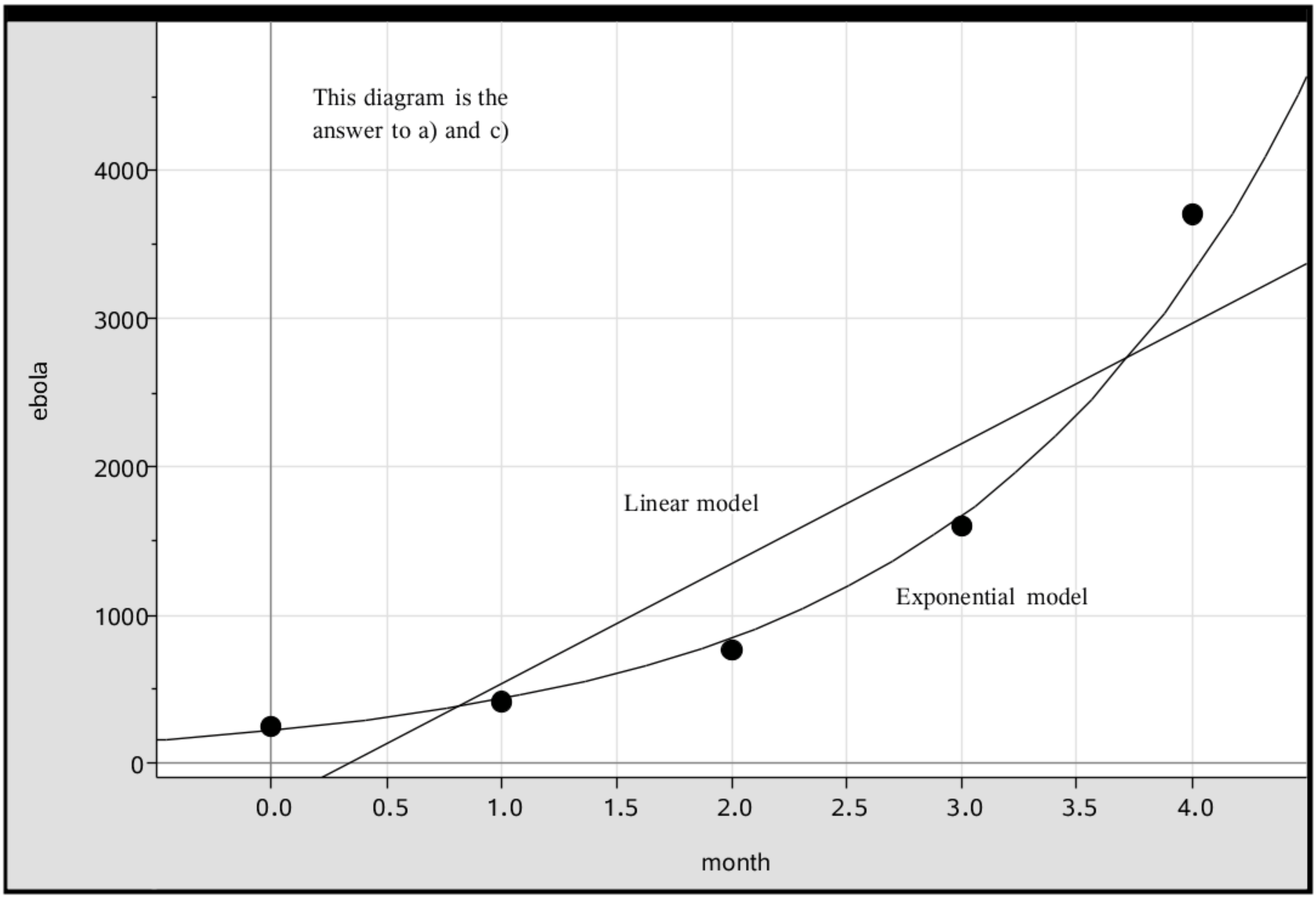
a) Scatter plot, see next page.

b) Correlation coefficient, see spread sheet: $r = 0.903617 \approx 0.904$

c) Linear and exponential regression curves plotted, see next page.

	A month	B ebola	C	D	E	F	G	H
=				=LinRegM		=ExpReg(		
1	0	242	Titel	Linear R...	Title	Exponen...		
2	1	419	RegEqn	m*x+b	RegEqn	a*b^x		
3	2	759	m	811.4	a	219.492		
4	3	1603	b	-276.8	b	1.97385		
5	4	3707	r²	0.816524	r²	0.99165		
6			r	0.903617	r	0.995816		
7			Resid	{518.8,-...	Resid	{22.5080..		
8					ResidTra..	{0.09762..		

A1 0



d) When will the total reach 50000?

$\text{solve}\left(219\cdot(1.97)^{x}=50000,x\right) \blacktriangleright x=8.0$

January 1st 2015 the total number of cases reaches 50000.

e) Number of infected in November 2014, i.e. $x=6$

Linear model: $811\cdot 6-277=$ **4589 cases**

Exponential model: $219\cdot(1.97)^{6}=$ **12801. cases**

WHO reported 13 567 cases in November 2014.

The exponential model is clearly the best model.

Justification (not required) :

The linear model predicts a result of only one third of the actual number of cases by November1st.

The result predicted by the exponential model is 5.6 % lower than the actual number.

$$\frac{13567-12801}{13567}\cdot 100=5.6$$