

AIDE À LA CORRECTION

MATHÉMATIQUES 3 PÉRIODES

PARTIE B

DATE : 11 juin 2018, matin

DURÉE DE L'EXAMEN :

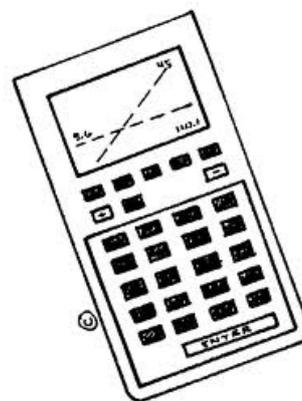
2 heures (120 minutes)

MATÉRIEL AUTORISÉ :

Examen avec support technologique :

Calculatrice TI-Nspire en mode « Press-to-test »

Crayon pour les graphiques



REMARQUES PARTICULIÈRES :

- Utiliser une nouvelle page pour chaque nouvelle question.
- Il est indispensable que les réponses soient accompagnées des explications nécessaires à leur élaboration.
- Les réponses doivent mettre en évidence le raisonnement qui amène aux résultats ou solutions.
- Lorsque des graphes sont utilisés pour trouver une solution, la réponse doit inclure des esquisses de ceux-ci.
- Sauf indication contraire dans la question, la totalité des points ne pourra être attribuée à une réponse correcte en l'absence du raisonnement et des explications qui permettent d'arriver aux résultats ou solutions.
- Lorsqu'une réponse est incorrecte, une partie des points pourra cependant être attribuée lorsqu'une méthode appropriée et/ou une approche correcte ont été utilisées.
- Certaines questions ne peuvent être résolues qu'à l'aide de la calculatrice. La formulation de ces questions l'indique alors clairement. Toutes les autres questions peuvent être résolues avec ou sans calculatrice.

Define $f(x) = (x^2 - 4) \cdot \ln(x+4)$ ▶ Done

a) $\text{domain}(f(x), x)$ ▶ $-4 < x < \infty$

b) $f_{\text{Max}}(f(x), x) | x < 0$ ▶ $x = -2.57217$

$f_{\text{Min}}(f(x), x) | 0 < x$ ▶ $x = 0.309999$

Coordinates max (-2.57, 0.932)

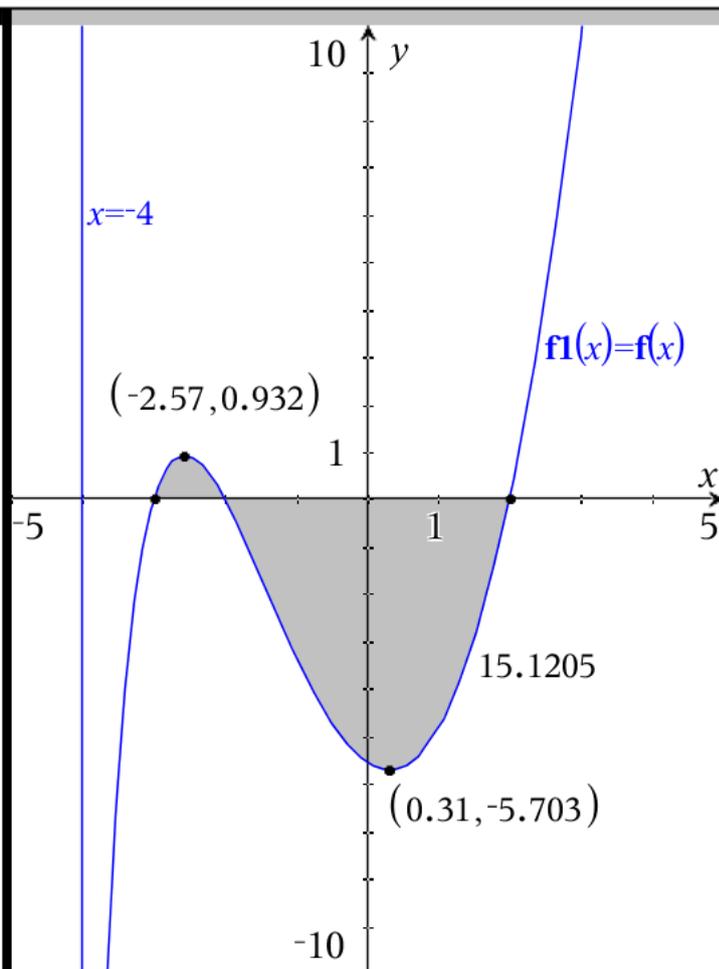
min (0.310, -5.70)

c) solve $(f(x) = 0, x)$ ▶ $x = -3$ or $x = -2$ or $x = 2$.

$$\int_{-3}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^2 -f(x) dx = 15.1205 \text{ or}$$

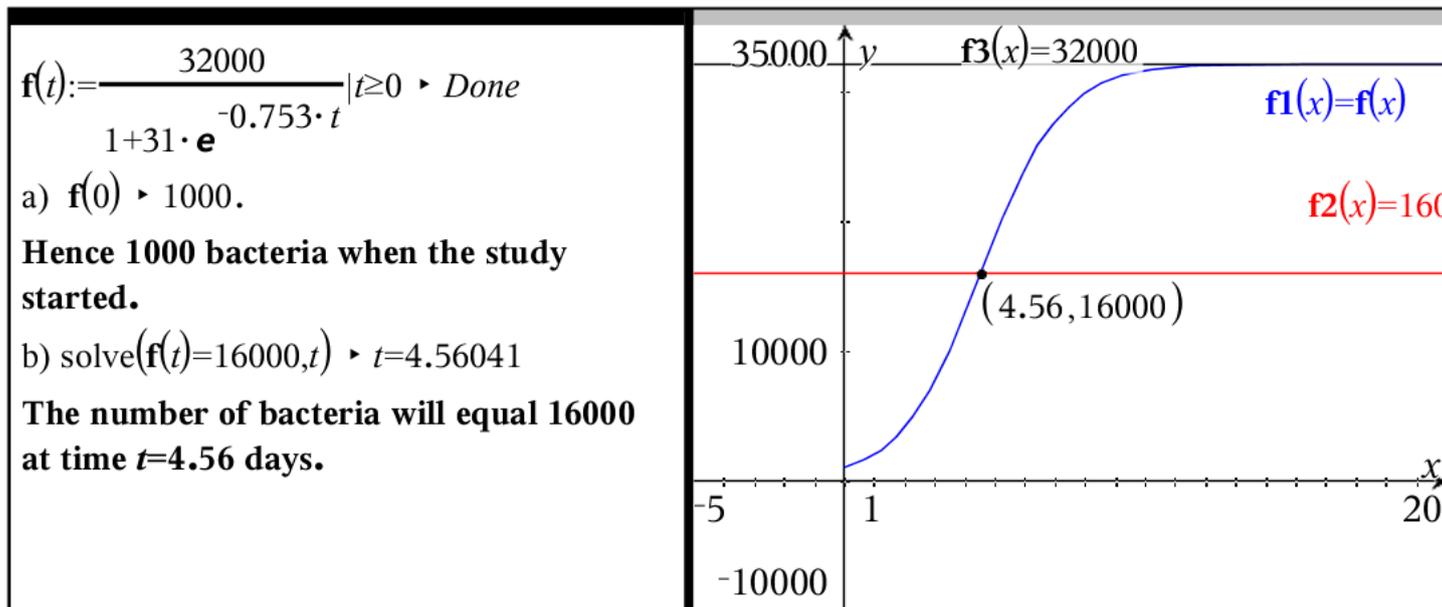
$$\int_{-3}^2 |f(x)| dx = 15.1205$$

Area also determined graphically, see →



PARTIE B																							
QUESTION B1 ANALYSE	Page 1/2	Barème																					
<p>Utiliser la calculatrice en b) et c).</p> <p>La fonction f est définie par</p> $f(x) = (x^2 - 4) \cdot \ln(x + 4).$ <p>a) Déterminer le domaine de définition de f.</p> <p>$x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$. Donc $\text{Dom } f =]-4 ; +\infty[$.</p> <p><u>Ou</u> à l'aide de la commande « domain » de la calculatrice : voir tns.</p>		2 points																					
<p>b) Déterminer les coordonnées des points associés aux extrema de f et spécifier leur nature.</p> $f'(x) = 2x \ln(x + 4) + \frac{x^2 - 4}{x + 4}.$ <p>$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx -2,57517$ ou $x \approx 0,309999$ (avec la calculatrice).</p> <p>On étudie le signe de $f'(x)$:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>-4</td> <td></td> <td>-2,57</td> <td></td> <td>0,31</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td></td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td></td> <td>↗</td> <td>0,93</td> <td>↘</td> <td>-5,70</td> <td>↗</td> </tr> </table> <p>On en déduit que f admet un maximum pour $x \approx -2,57217$ et un minimum pour $x \approx 0,309999$.</p> <p>$f(-2,57217) \approx 0,931724$ et $f(0,309999) \approx -5,70336$ (avec la calculatrice).</p> <p>Le point associé au maximum de f a donc pour coordonnées $(-2,57 ; 0,93)$ et celui associé au minimum de f $(0,31 ; -5,70)$ (à 0,01 près).</p> <p><u>Ou</u> à l'aide des commandes « fMax » et « fMin » de la calculatrice <u>ou</u> encore par lecture graphique sur la calculatrice : voir tns.</p>		x	-4		-2,57		0,31		$f'(x)$		+	0	-	0	+	$f(x)$		↗	0,93	↘	-5,70	↗	4 points
x	-4		-2,57		0,31																		
$f'(x)$		+	0	-	0	+																	
$f(x)$		↗	0,93	↘	-5,70	↗																	
<p>Explication de la démarche (signe de la dérivée ou utilisation des commandes ou du graphique sur la calculatrice) : 2 points. Coordonnées des deux points : 2 points.</p>																							

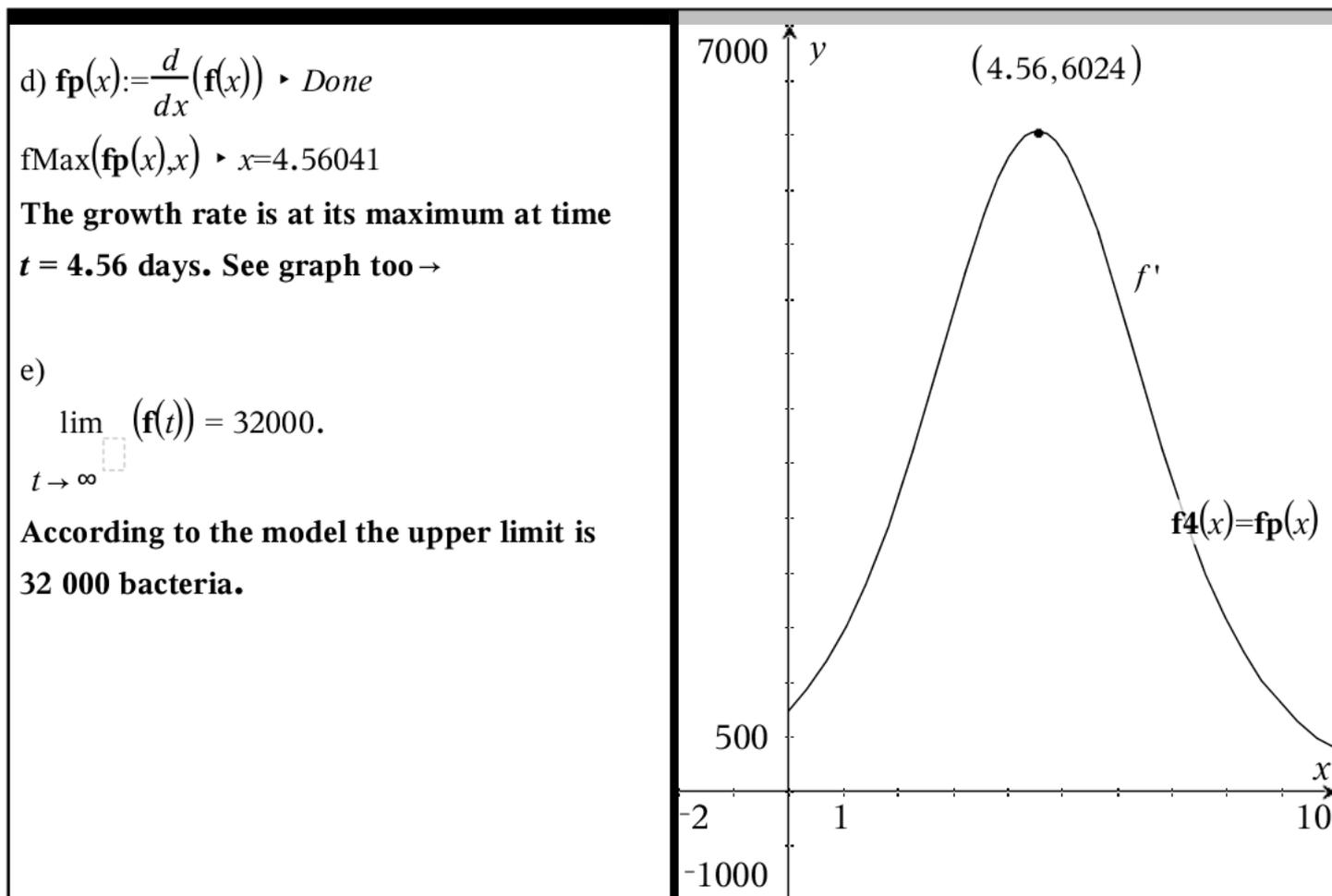
PARTIE B		
QUESTION B1 ANALYSE	Page 2/2	Barème
<p>c) Déterminer l'aire de la surface bornée délimitée par le graphique de f et l'axe des abscisses.</p> <p>On détermine les zéros de f :</p> $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4) \cdot \ln(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \text{ ou } x + 4 = 1 \Leftrightarrow$ $x = 2 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = -3.$ <p>Soit A l'aire de la surface bornée délimitée par le graphique de f et l'axe des abscisses.</p> $A = \int_{-3}^2 (x^2 - 4) \ln(x + 4) dx \approx 15,1205 \text{ (avec la calculatrice).}$ <p><u>Ou</u> : d'après la position du graphique de f par rapport à l'axe des abscisses : $A = \int_{-3}^{-2} (x^2 - 4) \ln(x + 4) dx - \int_{-2}^2 (x^2 - 4) \ln(x + 4) dx \approx 15,1205$ (avec la calculatrice).</p> <p><u>Ou</u> : on détermine l'aire à l'aide du graphique sur la calculatrice : voir tns.</p>		4 points
<p>Zéros : 1 point. Expression de l'aire par intégrales : 1 point. Valeur de l'aire : 2 points. Si l'aire est déterminée graphiquement sur la calculatrice : pas de répartition.</p>		



c) $f_p(x) := \frac{d}{dx}(f(x)) \triangleright \text{Done}$

$f_p(3) = 4344.03$

Interpretation: At time $t=3$ days the population increases by 4344 per day



PARTIE B		
QUESTION B2 ANALYSE	Page 1/3	Barème
<p>Utiliser la calculatrice en b), c) et d).</p> <p>En laboratoire, on étudie la croissance d'une culture bactérienne. Le nombre de bactéries présentes est modélisé par</p> $f(t) = \frac{32000}{1 + 31e^{-0,753t}}, t \geq 0,$ <p>où t est le temps en jours à partir du début de l'étude.</p> <p>a) Calculer le nombre de bactéries présentes au début de l'étude.</p> <p>Le nombre de bactéries présentes au début de l'étude est</p> $f(0) = \frac{32000}{1 + 31} = 1000.$		<p>2 points</p>
<p>Savoir qu'il faut calculer $f(0)$: 1 point. Réponse : 1 point.</p>		
<p>b) À quel instant le nombre de bactéries sera-t-il égal à 16000 ?</p> <p>On résout l'équation $f(t) = 16000 \Leftrightarrow \frac{2}{1 + 31e^{-0,753t}} = 1 \Leftrightarrow 31e^{-0,753t} = 1 \Leftrightarrow$</p> $e^{0,753t} = 31 \Leftrightarrow 0,753t = \ln(31) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(31)}{0,753} \approx 4,56041.$ <p><u>Ou</u> : à l'aide de la commande « solve » de la calculatrice : voir tns.</p> <p>Il y aura 16000 bactéries présentes après environ 4,56 jours.</p>		<p>3 points</p>
<p>Savoir qu'il faut résoudre l'équation $f(t) = 16000$: 1 point. Résolution de l'équation (avec ou sans « solve ») : 2 points.</p>		

PARTIE B		
QUESTION B2 ANALYSE	Page 2/3	Barème
<p>c) Déterminer $f'(3)$ et interpréter le résultat.</p> $f'(t) = 32000 \cdot \frac{31 \cdot 0,753 \cdot e^{-0,753t}}{(1 + 31e^{-0,753t})^2} = \frac{746976 \cdot e^{-0,753t}}{(1 + 31e^{-0,753t})^2}$ <p>Donc $f'(3) = \frac{746976 \cdot e^{-2,259}}{(1 + 31e^{-2,259})^2} \approx 4\,344,03$.</p> <p><u>Ou</u> : avec la calculatrice, on n'a pas besoin de l'expression de $f'(t)$ pour obtenir $f'(3)$: voir tns.</p> <p>Interprétation : Exactement 3 jours après le début de l'étude, le taux de croissance de la culture est d'environ 4344 bactéries par jour.</p>	<p>4 points</p>	
<p>Calcul de $f'(3)$: 2 points (dont éventuellement 1 point pour l'expression de $f'(t)$). Interprétation : 2 points.</p>		
<p>d) Déterminer à quel instant le taux de croissance sera à son maximum.</p> <p>Il faut déterminer l'instant t pour lequel $f'(t)$ est maximale.</p> $f'(t) = \frac{746976 \cdot e^{-0,753t}}{(1 + 31e^{-0,753t})^2}$ <p>On calcule $f''(t) = \frac{562473(31e^{-0,753t} - 1)e^{-0,753t}}{(1 + 31e^{-0,753t})^3}$.</p> $f''(t) = 0 \Leftrightarrow 31e^{-0,753t} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-0,753t} = \frac{1}{31} \Leftrightarrow 0,753t = \ln(31) \Leftrightarrow$ $t = \frac{\ln(31)}{0,753} \approx 4,56041.$ <p>Le signe de $f''(t)$ étant celui de $31e^{-0,753t} - 1$ qui est toujours décroissante, f'' s'annule en $t \approx 4,56$ en passant du positif au négatif. Donc f' admet un maximum en $t \approx 4,56$.</p> <p>On conclut que le taux de croissance sera à son maximum environ 4,56 jours après le début de l'étude.</p> <p><u>Ou</u> : à l'aide de la commande « fMax » de la calculatrice appliquée à $f'(t)$ sans devoir exprimer celle-ci : voir tns.</p> <p><u>Ou</u> : à l'aide de la calculatrice, lecture sur le graphique de f' des coordonnées du point associé au maximum de f' : voir tns.</p>	<p>3 points</p>	
<p>Savoir qu'il faut déterminer l'instant t pour lequel $f'(t)$ est maximale : 1 point. Calcul de cet instant : 2 points (dont éventuellement 1 point pour l'expression et l'étude du signe de $f''(t)$).</p>		

PARTIE B		
QUESTION B2 ANALYSE	Page 3/3	Barème
<p>e) Selon ce modèle, déterminer combien de bactéries seraient présentes si l'étude avait duré très longtemps.</p> $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{32000}{1 + 31e^{-0,753t}} = \frac{32000}{1 + 31 \cdot 0} = 32000.$ <p>Selon ce modèle, même si l'étude dure très longtemps, le nombre de bactéries présentes tend vers une limite supérieure de 32000 .</p>		3 points
<p>Savoir qu'il faut calculer la limite de $f(t)$ pour $t \rightarrow +\infty$: 1 point. Calcul de cette limite : 2 points.</p>		

$$\text{a) } P(\text{faulty battery}) = P(\text{faulty batt}|\text{touch}) \cdot P(\text{touch}) + P(\text{faulty batt}|\text{other}) \cdot P(\text{other}) = 0.07 \cdot 0.8 + 0.04 \cdot 0.2 = \mathbf{0.064}$$

$$\text{b) } n:=10, \quad p:=0.064, \quad Y=\# \text{ of faulty out of } 10$$

$$P(Y=1) = \text{binomPdf}(n,p,1) = \mathbf{0.352909} \approx \mathbf{0.353}$$

$$\text{c) } P(\text{at least 8 do not have a faulty battery}) = P(Y \leq 2) = \text{binomCdf}(n,p,0,2) = 0.977626 \approx \mathbf{0.978}$$

or $\text{binomCdf}(n,1-p,8,10) \approx 0.977626$

$$\text{d) } X = \text{life span in months}, \quad \mu:=48 \text{ months}, \quad \sigma:=10 \text{ months}$$

$$P(X > 3 \text{ years}) = \text{normCdf}(3 \cdot 12, \infty, \mu, 10) = 0.88493 \approx \mathbf{0.885}$$

$$\text{e) } P(X > 4 \mid X > 2) = \frac{P(X > 4 \text{ and } X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{P(X > 4)}{P(X > 2)} = \frac{\text{normCdf}(4 \cdot 12, \infty, 48, 10)}{\text{normCdf}(2 \cdot 12, \infty, 48, 10)} = 0.504133 \approx \mathbf{0.504}$$

PARTIE B		
QUESTION B3 PROBABILITÉS	Page 1/2	Barème
<p>Utiliser la calculatrice en b), c), d) et e).</p> <p>80 % des téléphones portables fabriqués par une entreprise sont équipés d'écrans tactiles.</p> <p>Une étude de la production montre que :</p> <p>7 % des téléphones portables avec écran tactile ont une pile défectueuse,</p> <p>4 % des téléphones portables sans écran tactile ont une pile défectueuse.</p> <p>On choisit au hasard un téléphone portable dans la production.</p> <p>a) Montrer que la probabilité que le téléphone portable choisi ait une pile défectueuse est de 0,064.</p> <p>On considère les événements :</p> <p>D : « le téléphone portable a une pile défectueuse », T : « le téléphone portable est équipé d'un écran tactile ».</p> $P(D) = P(D \cap T) + P(D \cap \bar{T}) = P(T) \cdot P(D T) + P(\bar{T}) \cdot P(D \bar{T})$ $= 0,8 \cdot 0,07 + 0,2 \cdot 0,04 = 0,056 + 0,008 = 0,064.$		3 points
<p>Connaissance de la démarche (formule) pour calculer $P(D)$: 1 point. Calcul de $P(D)$: 2 points.</p>		
<p>On choisit au hasard 10 téléphones portables dans la production.</p> <p>b) Calculer la probabilité qu'exactly un des téléphones portables choisis ait une pile défectueuse.</p> <p>Soit Y le nombre de téléphones portables parmi les 10 qui ont une pile défectueuse. Y suit une loi binomiale avec $n = 10$ et $p = 0,064$.</p> $P(Y = 1) = C_{10}^1 \cdot 0,064^1 \cdot 0,936^9 \approx 0,352909 \approx 0,353.$ <p><u>Ou</u> à l'aide la commande « binomPdf » de la calculatrice : voir tns.</p>		3 points
<p>Savoir qu'il s'agit d'une binomiale avec les bons paramètres : 1 point. Calcul de la probabilité : 2 points.</p>		

PARTIE B		
QUESTION B3 PROBABILITÉS	Page 2/2	Barème
<p>c) Calculer la probabilité qu'au moins 8 des téléphones portables choisis n'aient pas de pile défectueuse.</p> <p>« Au moins 8 des téléphones portables choisis n'ont pas de pile défectueuse » \Leftrightarrow « Au plus 2 des téléphones portables choisis ont une pile défectueuse ».</p> $P(Y \leq 2) = \sum_{k=0}^2 C_{10}^k \cdot 0,064^k \cdot 0,936^{10-k} \approx 0,977626 \approx 0,978.$ <p>Ou à l'aide la commande « binomCdf » de la calculatrice : voir tns.</p>		3 points
Même répartition que pour b).		
<p>Un client est préoccupé par la durée de vie d'un téléphone portable qu'il vient d'acheter.</p> <p>On suppose que la durée de vie des téléphones portables suit une loi normale de moyenne $\mu = 48$ mois et d'écart-type $\sigma = 10$ mois.</p> <p>d) Calculer la probabilité que le téléphone portable acheté par ce client ait une durée de vie supérieure à 3 ans.</p> <p>Soit X la durée de vie d'un téléphone portable. D'après l'énoncé, X suit une loi normale avec $\mu = 48$ et $\sigma = 10$. L'unité de temps étant le mois, il faut calculer $P(X > 36)$.</p> <p>On utilise la commande « normCdf » de la calculatrice : voir tns.</p> <p>On trouve : $P(X > 36) \approx 0,88493 \approx 0,885$.</p>		3 points
Savoir qu'il faut calculer $P(X > 36)$: 1 point. Calcul de la probabilité : 2 points.		
<p>e) Étant donné que le téléphone portable a fonctionné pendant 2 ans, calculer la probabilité qu'il fonctionnera encore pendant au moins 2 ans.</p> <p>Il faut calculer $P(X \geq 48 X \geq 24) = \frac{P((X \geq 48) \cap (X \geq 24))}{P(X \geq 24)} = \frac{P(X \geq 48)}{P(X \geq 24)}$.</p> <p>$\mu = 48 \Rightarrow P(X \geq 48) = 0,5$.</p> <p>Pour calculer le dénominateur on utilise la commande « normCdf » de la calculatrice (voir tns) et on trouve $P(X \geq 24) \approx 0,991802$.</p> <p>Enfin : $P(X \geq 48 X \geq 24) = \frac{0,5}{0,991802} \approx 0,504133 \approx 0,504$.</p>		3 points
Savoir qu'il faut calculer la probabilité conditionnelle $P(X \geq 48 X \geq 24)$ et bien appliquer la formule : 1 point. Calcul de la probabilité : 2 points.		

a) $x1 := \text{mean}(\{0, 10, 20, 30\}) = 15$

$x2 := \text{mean}(\{40, 50, 60, 70\}) = 55$

$y1 := \text{mean}(\{4.9, 7.2, 11.5, 18.4\}) = 10.5$

$y2 := \text{mean}(\{29.4, 47, 75.1, 120\}) = 67.875$

Mayer's line: $y = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} \cdot (x - x1) + y1 \rightarrow y = 1.43438 \cdot x - 11.0156 \quad y = 1.43 \cdot x - 11.02$

b) Scatter plot is drawn on the next page. A linear model does not seem to be appropriate.

c) Exponential regression (see next page) gives $y = 4.66515 \cdot (1.04728)^x$, i.e.

$a = 4.6652$ and $b = 1.0473$

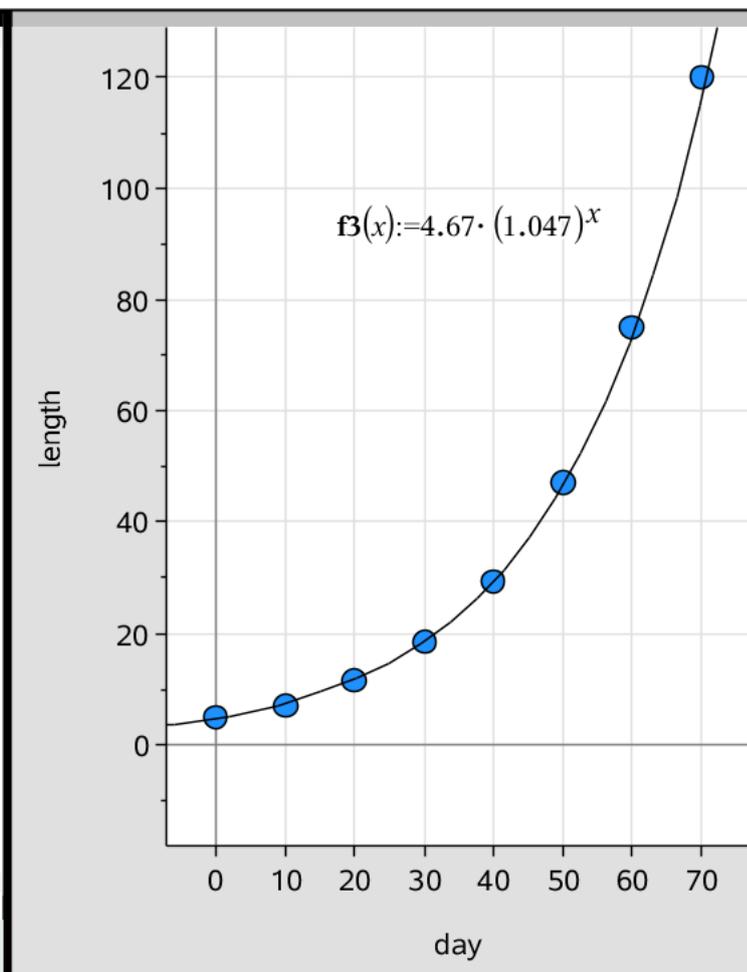
d) The graph of $y = 4.67(1.047)^x$ is drawn on the next page.

e) The number 1.047 tells that the length of a leaf is increasing by 4.7 % per day.

f) After 25 days: $4.67 \cdot (1.047)^{25} = 14.7226 \approx 14.7$ mm. This results corresponds very well with the data in the tabel.

After 130 days: $4.67 \cdot (1.047)^{130} = 1829.72 \approx 1830$ mm = 1.8 meters. Unlikely to see such a long leaf. You cannot expect to extrapolate a model that far.

	A day	B length	C	D
=				=ExpReg(
1	0	4.9	Titel	Exponen...
2	10	7.2	RegEq...	a*b^x
3	20	11.5	a	4.66515
4	30	18.4	b	1.04728
5	40	29.4	r ²	0.999539
6	50	47	r	0.999769
7	60	75.1	Resid	{0.23485..
8	70	120	ResidT..	{0.04911..
9				
10				
11				
12				
AI	0			



PARTIE B																											
QUESTION B4 STATISTIQUES							Page 1/2	Barème																			
<p>Utiliser la calculatrice en c), d) et f).</p> <p>Une étude a été menée sur la croissance des feuilles sur un certain arbre. Le tableau ci-dessous indique la longueur d'une feuille (en mm) sur une période de 70 jours.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Jour (x)</th> <td>0</td> <td>10</td> <td>20</td> <td>30</td> <td>40</td> <td>50</td> <td>60</td> <td>70</td> </tr> <tr> <th>Longueur (y)</th> <td>4,9</td> <td>7,2</td> <td>11,5</td> <td>18,4</td> <td>29,4</td> <td>47</td> <td>75,1</td> <td>120</td> </tr> </thead> </table> <p>a) Établir une équation de la droite de Mayer.</p> <p>On détermine les coordonnées du point moyen entre les points de coordonnées (0 ; 4,9), (10 ; 7,2), (20 ; 11,5) et (30 ; 18,4) :</p> $A\left(\frac{0+10+20+30}{4}; \frac{4,9+7,2+11,5+18,4}{4}\right) = (15; 10,5)$ <p>et les coordonnées du point moyen entre les points de coordonnées (40 ; 29,4), (50 ; 47), (60 ; 75,1) et (70 ; 120) :</p> $B\left(\frac{40+50+60+70}{4}; \frac{29,4+47+75,1+120}{4}\right) = (55; 67,875).$ <p>La droite de Mayer est la droite (AB) ; elle a pour équation :</p> $y - 10,5 = \frac{67,875 - 10,5}{55 - 15}(x - 15) \Leftrightarrow y = 1,434375(x - 15) + 10,5 \Leftrightarrow$ $y = 1,434375x - 11,015625 \Leftrightarrow y \approx 1,43x - 11,02.$									Jour (x)	0	10	20	30	40	50	60	70	Longueur (y)	4,9	7,2	11,5	18,4	29,4	47	75,1	120	4 points
Jour (x)	0	10	20	30	40	50	60	70																			
Longueur (y)	4,9	7,2	11,5	18,4	29,4	47	75,1	120																			
<p>Savoir que la droite de Mayer est la droite des deux points moyens : 1 point. Coordonnées des deux points moyens : 1 point. Équation de la droite : 2 points.</p>																											
<p>b) Tracer un graphique en nuage de points représentant les données du tableau et utiliser ce graphique pour expliquer si un modèle linéaire est approprié.</p> <p>Graphique : voir tns. L'allure du graphique indique qu'un modèle linéaire n'est pas approprié.</p>									4 points																		
<p>Graphique : 2 points. Modèle linéaire approprié ou non : 2 points.</p>																											

PARTIE B		
QUESTION B4 STATISTIQUES	Page 2/2	Barème
<p>c) Établir une équation de la forme $y = a \cdot b^x$ de la régression exponentielle de y en x. Arrondir les nombres a et b au dix-millième (4 décimales).</p> <p>On détermine la régression exponentielle à l'aide de la calculatrice : voir tns. On obtient $y = 4,66515 \cdot 1,04728^x$. Arrondis : $a \approx 4,6652$ et $b \approx 1,0473$.</p>		3 points
<p>Si a et b sont copiés sur la suite ($a = 4,67$ et $b = 1,047$) : 0 point. Si a et b sont les valeurs données par la calculatrice, avec 5 décimales : 2,5 points. Si a et b sont arrondis comme demandé : 3 points.</p>		
<p>Pour d), e) et f), utiliser le modèle de régression exponentielle :</p> $y = 4,67 \cdot 1,047^x.$		
<p>d) Ajouter cette courbe de régression exponentielle au diagramme de b). Graphique : voir tns.</p>		2 points
<p>e) Que signifie, dans ce modèle, le nombre 1,047 quant à la croissance d'une feuille ?</p> <p>Chaque jour, la longueur d'une feuille est multipliée par 1,047 c'est-à-dire qu'elle augmente de 4,7 % par jour.</p>		3 points
<p>f) Estimer la longueur d'une feuille après 25 jours et après 130 jours. Commenter ces résultats.</p> <p>Après 25 jours : $y = 4,67 \cdot 1,047^{25} \approx 14,7226$; la longueur d'une feuille est alors, d'après ce modèle, d'environ 14,7 mm. Après 130 jours : $y = 4,67 \cdot 1,047^{130} \approx 1829,72$; la longueur d'une feuille est alors, d'après ce modèle, d'environ 1,83 m. Commentaire : le premier résultat correspond bien aux données du tableau mais le deuxième est invraisemblable ce qui signifie que le modèle ne convient pas pour une aussi longue période.</p>		4 points
<p>Calculs : 2 points. Commentaire : 2 points.</p>		