Sujet : `http://www.barsamian.am/EE_examens/S7P3_Annales_prebac/2020_Prebac.pdf`.

**Exercice A1**

On lit graphiquement le signe de $f'$ pour en déduire les variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sgn.** $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| **Var** $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

**Exercice A2**

Ici on commence par trouver toutes les primitives :

$$f(x) = 3 \times x^3 + 2 \times x^2 + 5 \times x - 4 \times 1.$$
$$F(x) = 3 \times \frac{x^4}{4} - 2 \times \frac{x^3}{3} + 5 \times \frac{x^2}{2} - 4 \times x.$$
$$\boxed{F(x) = \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x + k}.$$

1 : Ecrire chaque terme de $f$ comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dans chaque terme garder la constante et prendre une primitive de la fonction de référence.

3 : Pour trouver toutes les primitives, on rajoute une constante $k$.

Maintenant, il faut que $F$ vérifie la condition $F(-1) = 2$ :

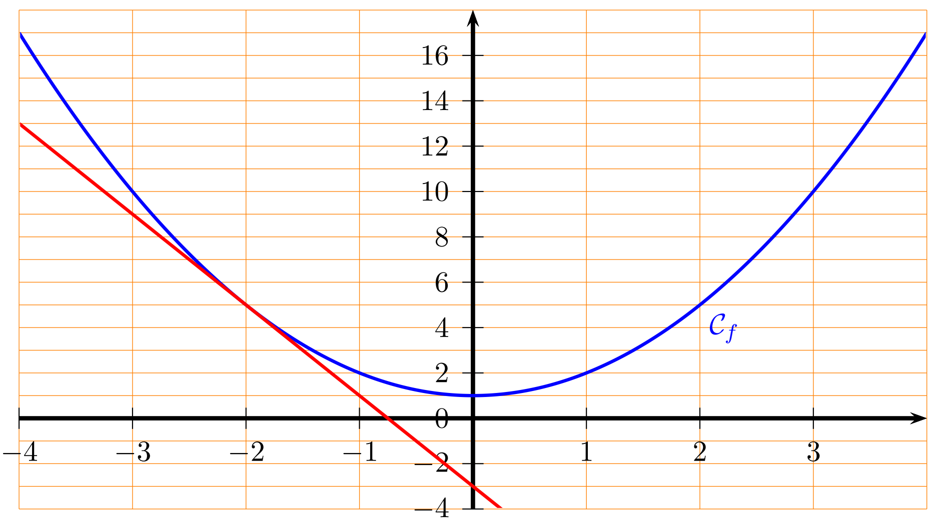
$$\begin{aligned}
F(-1) &= 2 && \text{On utilise l'expression de } F\\
\frac{3\times(-1)^4}{4} + \frac{2\times(-1)^3}{3} + \frac{5\times(-1)^2}{2} - 4\times(-1) + k &= 2 && \text{On calcule}\\
\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{2} + 4 + k &= 2 && \text{On soustrait tout}\\
k &= 2 - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{2} - 4 && \text{On ne perd pas de temps}\\
k &= \frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{5}{2} - 2
\end{aligned}$$

Ainsi la primitive cherchée est la fonction $\boxed{F(x) = \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{5}{2} - 2}$.

**Exercice A3**

On reconnaît une fonction du second degré, donc ça va faire une parabole. On calcule quelques valeurs avant de tracer :

| $x$ | $x^2+1$ |
|---|---|
| $-4$ | 17 |
| $-3$ | 10 |
| $-2$ | 5 |
| $-1$ | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 5 |
| 3 | 10 |
| 4 | 17 |



Pour la tangente au graphe au point d'abscisse $-2$ (que j'ai tracée sur le graphique), on utilise la formule de la tangente au point d'abscisse $a$ :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

Ici, $f'(x) = 2x$ et $a = -2$ donc on a $f'(-2) = 2 \times (-2) = -4$ et $f(-2) = 5$, d'où l'équation $y = -4 \times (x - (-2)) + 5$ c'est-à-dire $\boxed{y = -4x - 3}$. On peut vérifier sur le graphique que c'est bien cohérent : la droite rouge a bien pour coefficient directeur $-4$ et pour ordonnée à l'origine $-3$.

**Exercice A4**

$$\begin{array}{rcll}
\ln(3x-8) & = & 0 & \\
 & & & \text{On compose par } x \mapsto \mathrm{e}^x \\
\mathrm{e}^{\ln(3x-8)} & = & \mathrm{e}^0 & \\
 & & & \mathrm{e}^{\ln(y)} = y \\
3x - 8 & = & 1 & \\
 & & & +8 \\
3x & = & 9 & \\
 & & & \div 3 \\
x & = & 3 &
\end{array}$$

Une fois ici, on vérifie que 3 est bien dans l'ensemble de définition. Effectivement, je peux bien calculer $\ln(3 \times 3 - 8)$ car $3 \times 3 - 8 = 1 > 0$. Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{3\}}$.

**Exercice A5**

Pour calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (2+x)^2 dx$, on pose $f(x) = (2+x)^2$, on calcule une primitive $F$ de $f$, puis on utilise la formule du formulaire :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ici, avant de calculer une primitive, il faut développer (car on ne sait pas calculer la primitive d'un produit de fonctions). On peut appliquer l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ou juste faire une double distributivité, dans les deux cas on trouve :

$f(x) = x^2 + 4x + 4$

On en déduit une primitive

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 4\dfrac{x^2}{2} + 4x = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x$

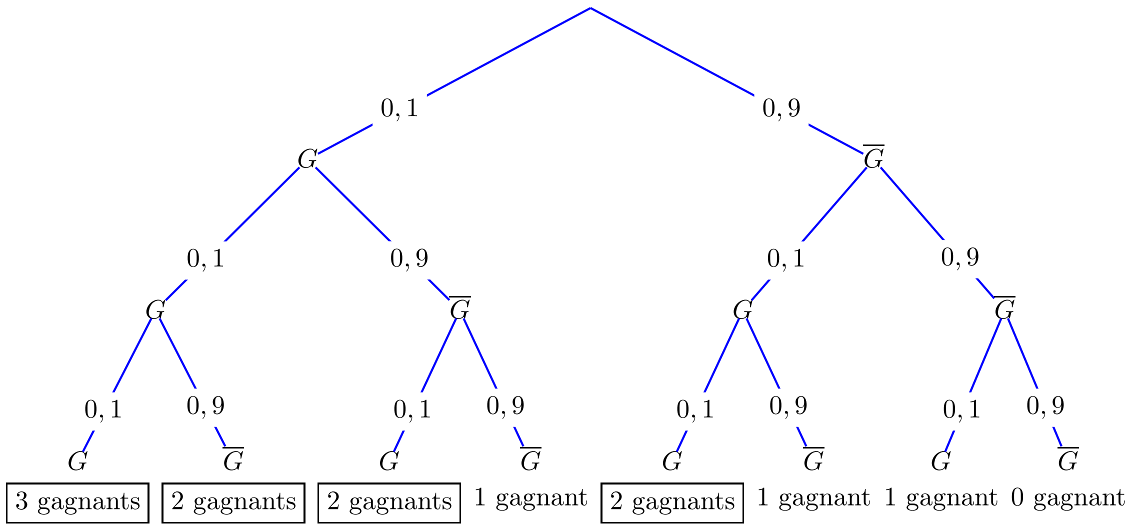
Maintenant, l'intégrale demandée vaut $F(\mathrm{e}) - F(1) = (\dfrac{\mathrm{e}^3}{3} + 2\mathrm{e}^2 + 4\mathrm{e}) - (\dfrac{1^3}{3} + 2 \times 1^2 + 4 \times 1) = \dfrac{\mathrm{e}^3}{3} + 2\mathrm{e}^2 + 4\mathrm{e} - \dfrac{1}{3} - 2 - 4 = \boxed{\dfrac{\mathrm{e}^3}{3} + 2\mathrm{e}^2 + 4\mathrm{e} - \dfrac{1}{3} - 6}$.

**Exercice A6**

Il y a tellement de billets qu'on peut faire l'approximation que lorsqu'on en choisit plusieurs, tout se passe comme s'il s'agissait d'un tirage avec remise (alors que, bien sûr, c'est un tirage sans remise) : c'est-à-dire que la probabilité que chaque billet soit gagnant reste la même, du 1e au 3e.

Ainsi, on reconnaît une situation de loi binomiale : on a la répétition de 3 événements identiques et indépendants. Si on note $X$ la variable aléatoire "nombre de billets gagnants", on nous demande donc $P(X \geq 2)$ qu'on peut donc calculer comme $P(X = 2) + P(X = 3)$. On peut alors calculer tout ça avec la formule du formulaire.

Sinon, on peut aussi dessiner un arbre pour modéliser la situation (arbre complet en bas). $G =$ "acheter un billet gagnant".

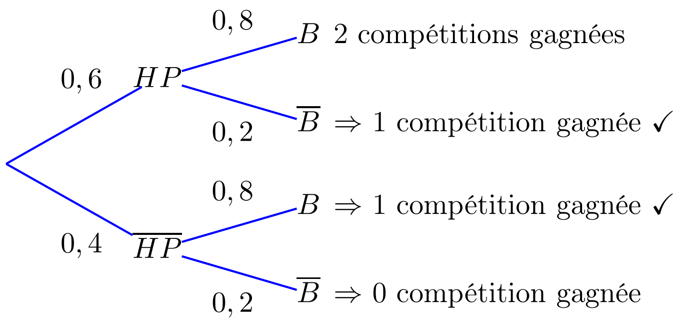



L'événement demandé est sur quatre branches. La branche "3 gagnants" a pour probabilité $0,1^3$ et les trois branches "2 gagnants" ont chacune pour probabilité $0,1^2 \times 0,9$. On fait la somme, on obtient :

$P(X \geq 2) = 0,1^3 + 3 \times 0,1^2 \times 0,9 = 0,001 + 3 \times 0,01 \times 0,9 = 0,001 + 0,027 = \boxed{0,0028}$

**Exercice A7**

On va dessiner un arbre pour modéliser la situation. $HP$ = "Gagner le half-pipe" et $B$ = "Gagner le boardercross".




L'événement demandé est sur deux branches. On fait la somme, on obtient :

$P(1 \text{ compétition gagnée}) = 0,6 \times 0,2 + 0,4 \times 0,8 = 0,12 + 0,32 = \boxed{0,44}$

**Exercice A8**

- 9 valeurs
- Médiane : son rang est $\dfrac{9+1}{2} = 5$. La 5e valeur est $\boxed{10}$.
- Q1 : $\dfrac{9}{4} = 2,25$ donc c'est la 3e valeur. C'est $\boxed{8}$.
- Q3 : $\dfrac{9 \times 3}{4} = 7,75$ donc c'est la 8e valeur. C'est $\boxed{14}$.
- Écart interquartile : Q3-Q1 $= 14 - 8 = \boxed{6}$.