1 Partie A — Sans calculatrice

Exercice A1 — Analyse (5 points)

> Calculez la primitive $F(x)$ de la fonction $f(x) = 6x^2 + 8x - 5$ satisfaisant $F(-1) = 5$.

Ici on commence par trouver toutes les primitives :

$f(x) = 6 \times x^2 + 8 \times x - 5 \times 1.$

$F(x) = 6 \times \frac{x^3}{3} + 8 \times \frac{x^2}{2} - 5 \times x.$

$\boxed{F(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + k}.$

1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dans chaque terme garder la constante et prendre une primitive de la fonction de référence.

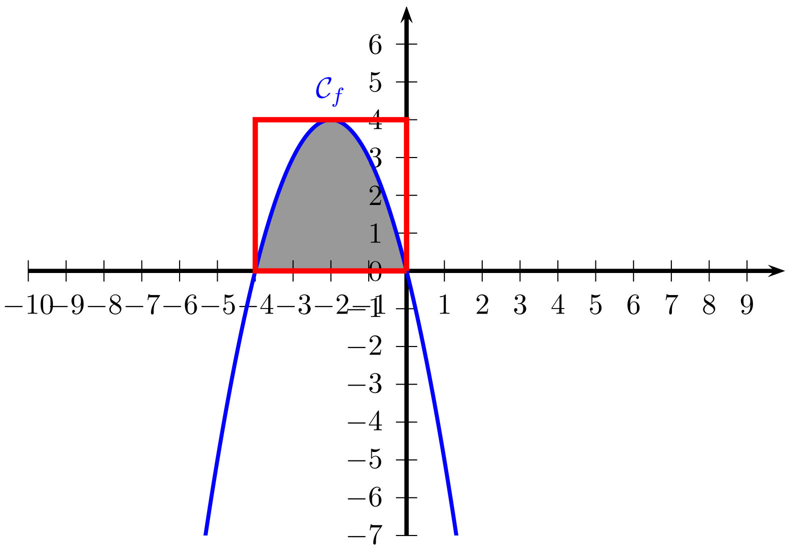
3 : Pour trouver toutes les primitives, on rajoute une constante k.

Maintenant, il faut que F vérifie la condition $F(-1) = 5$:

$$\begin{aligned}
F(-1) &= 5 && \text{On utilise l'expression de } F\\
2 \times (-1)^3 + 4 \times (-1)^2 - 5 \times (-1) + k &= 5 && \text{On calcule}\\
-2 + 4 + 5 + k &= 5 && \text{On simplifie}\\
7 + k &= 5 && -7\\
k &= -2
\end{aligned}$$

Ainsi la primitive cherchée est la fonction $\boxed{F(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 2}$.

Exercice A2 — Analyse (5 points)

> Soit la fonction $f(x) = -x^2 - 4x$ dont le graphe est donné ci-dessous:
>
> 
>
>
> Prouvez que l'aire grisée est égale à $\frac{32}{3} \approx 10,7$ u.a.

Pour calculer l'aire grisée, on remarque que c'est “l'aire sous la courbe” d'une fonction <u>positive</u>, entre $x = -4$ et $x = 0$ (abscisses qu'on peut clairement lire sur le graphique). Il faut donc calculer $\int_{-4}^{0} f(x)dx$ (si on veut vraiment s'assurer tous les points, on justifie que -4 et 0 sont bien deux racines de f car $f(-4) = f(0) = 0$). On calcule une primitive F de f, puis on utilise la formule du formulaire :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Une primitive se calcule comme précédemment :
$F(x) = -\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} = -\frac{x^3}{3} - 2x^2$

On peut maintenant faire le calcul de l'intégrale $F(0)-F(-4) = \left(-\frac{0^3}{3} - 2\times 0^2\right) - \left(-\frac{(-4)^3}{3} - 2\times(-4)^2\right) = 0 - \left(-\frac{-64}{3} - 2\times 16\right) = \boxed{-\frac{64}{3}+32}$.

On peut vérifier le calcul (qui fait environ 11) car sur le dessin l'aire grisée est à l'intérieur du carré d'aire 16 dont j'ai tracé le contour, donc c'est bien cohérent.

Exercice A3 — Analyse (5 points)

> Soit la fonction $f(x) = 4\ln(2x-5)$. Calculez l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 3$.

Pour la tangente au graphe au point d'abscisse 3, on utilise la formule de la tangente au point d'abscisse a :

$$y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$$

Ici, $f'(x) = 4 \times \frac{2}{2x-5} = \frac{8}{2x-5}$ et $a = 3$ donc on a $f'(3) = \frac{8}{2\times 3 - 5} = \frac{8}{1} = 8$ et $f(3) = 4\ln(1) = 4\times 0 = 0$, d'où l'équation $y = 8\times(x-3)+0$ c'est-à-dire $\boxed{y = 8x - 24}$.

Exercice A4 — Analyse (5 points)

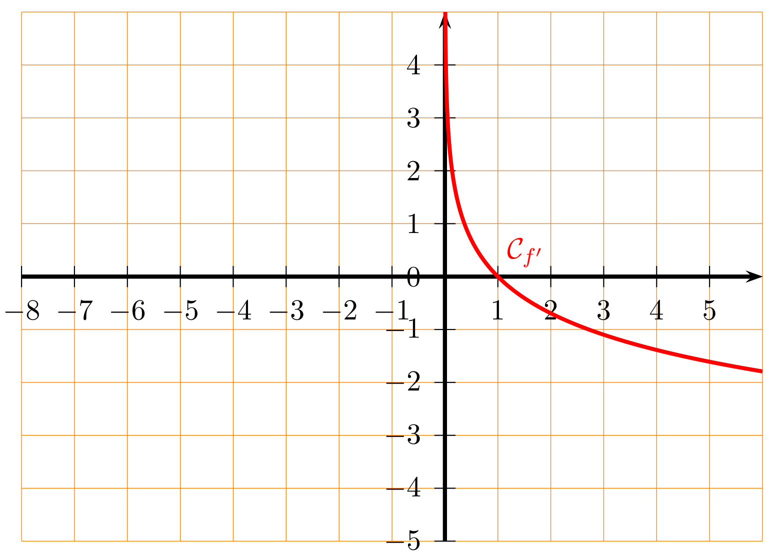
> Résoudre l'équation $2\mathrm{e}^{-3x-3} + 4 = 6$.

$$\begin{aligned}
2\mathrm{e}^{-3x-3}+4 &= 6 \\
2\mathrm{e}^{-3x-3} &= 2 && -4 \\
\mathrm{e}^{-3x-3} &= 1 && \div 2 \\
\ln\left(\mathrm{e}^{-3x-3}\right) &= \ln(1) && \text{On compose par } x \mapsto \ln(x) \\
-3x-3 &= 0 && \ln\left(\mathrm{e}^{y}\right) = y \\
-3 &= 3x && +3x \\
-1 &= x && \div 3
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-1\}}$.

Exercice A5 — Analyse (5 points)

> Soit la fonction f dont la dérivée f' est représentée dans le graphe ci-dessous :



Déterminez l'abscisse de l'extrémum de f en précisant le type d'extrémum. Justifiez.

On lit graphiquement le signe de f' pour en déduire les variations de f :

x	0		1		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Var $f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi f a un $\boxed{\text{maximum}}$ à l'abscisse $\boxed{1}$.

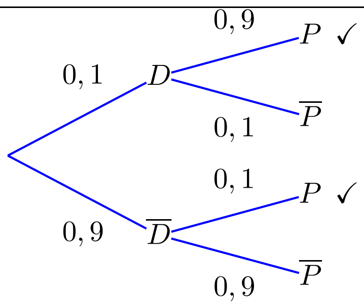
Exercice A6 — Probabilités (5 points)

10% des personnes participant à une compétition cycliste sont dopées.
Pour une personne dopée, la probabilité qu'un test anti-dopage soit positif est 0,9.
Pour une personne non dopée, la probabilité qu'un test anti-dopage soit positif est 0,1.
On choisit un cycliste au hasard. Représentez la situation à l'aide d'un arbre de probabilités. Calculez la probabilité que le test du participant choisi soit positif.

On va dessiner un arbre pour modéliser la situation. D = "Le cycliste est dopé" et P = "Le test est positif".

L'événement demandé est sur deux branches. On fait la somme, on obtient :

$P(P) = 0,1\times 0,9 + 0,9\times 0,1 = 0,09 + 0,09 = \boxed{0,18}$



Exercice A7 — Probabilités (5 points)

Dans une école on propose 2 options : art et musique. Un groupe de 16 étudiants doit faire ses choix. Chaque étudiant peut choisir de prendre soit les deux options, seulement une des deux ou aucune des deux options.

Dans ce groupe, 12 étudiants ont pris l'option art, 8 ont pris l'option musique et 1 étudiant n'a pris aucune option.

Représentez cette situation à l'aide d'un diagramme approprié.

On choisit un étudiant de ce groupe au hasard et on sait qu'il a choisi l'option musique. Quelle est la probabilité que cet étudiant ait pris l'option art ? On interprétera cela comme une probabilité conditionnelle.

On va remplir un tableau à double entrée pour modéliser la situation.

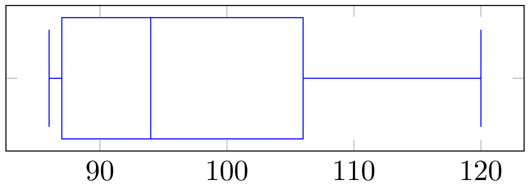
Art \ Musique	Oui	Non	Total
Oui	5	7	12
Non	3	1	4
Total	8	8	16

La probabilité qu'il ait pris art sachant qu'il a pris musique se calcule par :
$\dfrac{\text{effectif(art et musique)}}{\text{effectif(musique)}} = \boxed{\dfrac{5}{8}}$.

Exercice A8 — Statistiques (5 points)

> Les nombres de matchs joués par les 11 meilleurs footballeurs de l'équipe nationale Belge forment la série statistique suivante :
>
> $$86, 86, 87, 89, 92, 94, 100, 100, 106, 107, 120.$$
>
> Tracez un diagramme en boîte à moustaches représentant cette série et calculez l'écart interquartile.

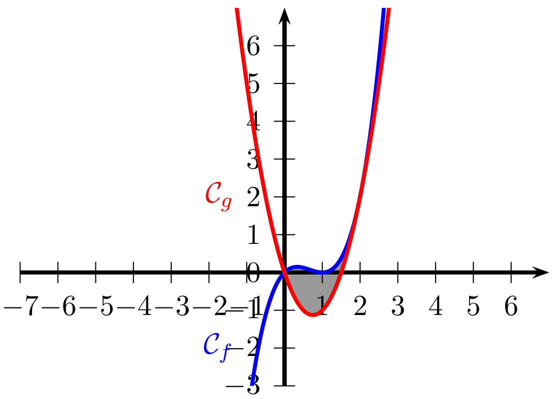
- 11 valeurs
- Médiane : son rang est $\dfrac{11+1}{2} = 6$. La 6e valeur est $\boxed{94}$.
- Q1 : $\dfrac{11}{4} = 2,75$ donc c'est la 3e valeur. C'est $\boxed{87}$.
- Q3 : $\dfrac{11 \times 3}{4} = 8,25$ donc c'est la 9e valeur. C'est $\boxed{106}$.
- Écart interquartile : Q3-Q1 $= 106 - 87 = \boxed{19}$.

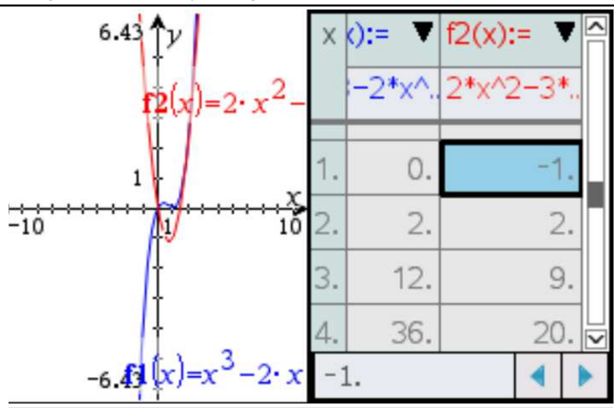


2 Partie B — Avec calculatrice

Exercice B1 — Analyse (10 points)

	Soit les fonctions : $$f(x) = x^3 - 2x^2 + x \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^2 - 3x.$$
4 points	a) Esquissez les graphes de ces fonctions et calculez les racines et les extréma de la fonction f.
4 points	b) Les graphes de f et g ont deux points d'intersection. Montrer que les tangentes au graphe de f en ces points sont les droites $$(T) : y = x \quad \text{et} \quad (T') : y = 5x - 8.$$
2 points	c) Calculez l'aire fermée comprise entre les graphes de f et g.





solve(f1(x)=0,x)	x=0 or x=1
$df1(x) := \dfrac{d}{dx}(f1(x))$	*Terminé*
solve(df1(x)≥0,x)	$x \leq \dfrac{1}{3}$ or $x \geq 1$
solve(f1(x)=f2(x),x)	x=0 or x=2

df1(0)	1
df1(2)	5
f1(0)	0
f1(2)	2
tangentLine(f1(x),x,0)	x
tangentLine(f1(x),x,2)	5·x−8

a) On rentre $f1(x) = x^3 - 2x^2 + x$ et $f2(x) = 2x^2 - 3x$ dans le menu graphique de la calculatrice, et on appuie sur Ctrl + T pour avoir le tableau de valeurs pour recopier le graphique.

Pour les racines de f, on tape $solve(f1(x)=0,x)$. La calculatrice répond $\boxed{\mathcal{S}=\{0;1\}}$.

Pour les extrema de f, on les aperçoit sur le graphique (un maximum local d'environ $0,1$ en $x\approx 0,2$ et un minimum local 0 en $x=1$). Pour avoir des valeurs exactes on peut demander la dérivée de $f1$ et son signe $df1(x):=\dfrac{d}{dx}(f1(x))$ puis $solve(df1(x)\geq 0,x)$. La calculatrice répond que la dérivée est positive avant $\dfrac{1}{3}$ puis après 1. Ainsi f a un maximum local en $x=\dfrac{1}{3}$ qui vaut $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\boxed{\dfrac{4}{27}}\approx 0,15$ et un minimum local en $x=1$ qui vaut $f(1)=\boxed{0}$.

b) Pour trouver les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on tape $solve(f1(x)=f2(x),x)$. La calculatrice nous répond que c'est en $x=0$ et $x=2$.

Maintenant on peut soit utiliser directement l'outil *tangentLine* de la calculatrice, soit appliquer la formule de l'équation de la tangente au point d'abscisse a, pour $a=0$ et $a=2$:

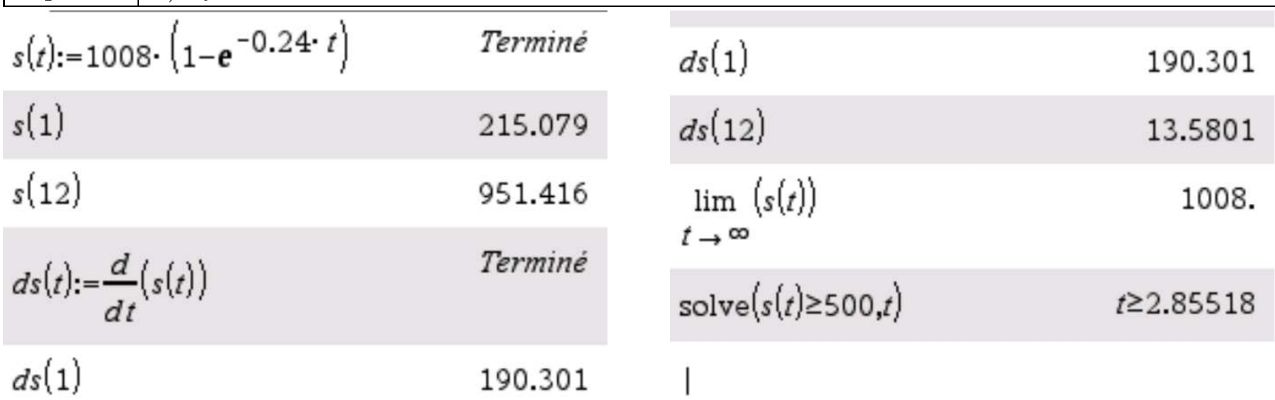
$$y=f'(a)\times(x-a)+f(a)$$

Ici, la calculatrice donne $df1(0)=1$ et $df1(2)=5$ ainsi que $f1(0)=0$ et $f1(2)=2$ d'où la première tangente d'équation $y=1\times(x-0)+0$ c'est-à-dire $\boxed{y=x}$ et la seconde tangente d'équation $y=5\times(x-2)+2$ c'est-à-dire $\boxed{y=5x-8}$.

c) Ici, l'aire fermée entre les graphes se trouve entre $x=0$ et $x=2$ (on a trouvé les points d'intersection à la question précédente). Donc, on peut simplement taper à la calculatrice : $\displaystyle\int_0^2 |f1(x)-f2(x)|dx=\boxed{\frac{4}{3}}$.

Exercice B2 — Analyse (15 points)

	Le professeur T. Katz a inventé un nouveau piège à souris et a créé une entreprise pour le vendre. Le professeur modélise ces chiffres de vente par la formule : $$S(t)=1008\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-0.24t}\right)$$ où $S(t)$ est le nombre total de pièges vendus les t premiers mois.
3 points	a) Calculez le nombre de pièges vendus le premier mois, puis les 12 premiers mois (arrondi à l'unité près).
3 points	b) Calculez le taux d'accroissement après 1 mois, puis après 12 mois.
3 points	c) Expliquez ce que vos résultats du (b) donnent comme information sur les ventes de pièges.
3 points	d) En considérant une limite de la fonction $S(t)$, calculez le nombre maximum de ventes de pièges.
3 points	e) Quand les ventes atteindront-elles les 500 unités ?



a) On rentre l'expression de $s(t)$ puis on demande la valeur $s(1)\approx\boxed{215}$ et $s(12)\approx\boxed{951}$.

b) On commence par demander à la calculatrice de calculer la dérivée $ds(t) := \frac{d}{dt}(s(t))$ puis on demande la valeur $ds(1) \approx \boxed{190}$ et $ds(12) \approx \boxed{14}$.

c) Le taux d'accroissement représente la dérivée de la fonction, donc l'augmentation de la fonction à venir. Ainsi, comme $ds(1) \approx 190$ et $ds(12) \approx 14$, cela veut dire qu'il y a une forte croissance du nombre total de pièges vendus au départ (au bout d'un mois), puis une croissance très faible (au bout de 12 mois). En résumé, le professeur $\boxed{\text{vend de moins en moins de pièges}}$ au fur et à mesure (car le total du nombre de pièges grandit de moins en moins vite).

d) Puisque le nombre total de pièges ne fait que monter, il faut donc calculer la limite en $+\infty$: $\lim_{t \to +\infty} s(t) = \boxed{1008}$.

Ainsi, au maximum, le nombre total de pièges vendus sera de 1008 unités.

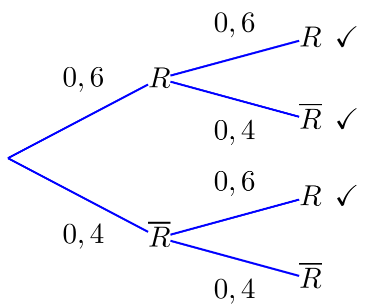
e) On va demander à la calculatrice de résoudre $solve(s(t) \geq 500, t)$. Elle nous répond que c'est pour $t \geq 2,85518$, donc c'est $\boxed{\text{à partir du 3e mois}}$ (attention, ce n'est pas un arrondi : comme il faut que t soit plus grand que $2,88518$, ça veut dire que pour 2 mois ce n'était pas encore bon, mais que pour 3 mois c'est le premier mois où c'est bon).

Exercice B3 — Probabilités (15 points)

	Un garage automobile est équipé d'un capteur pour vérifier la conformité des gaz d'échappement avec les normes environnementales. On sait que 40% des voitures ne respectent pas les normes requises.
3 points	a) Deux voitures sont testées un jour. Calculez la probabilité qu'au moins l'une d'elles respecte les normes requises.
	b) Un autre jour 20 voitures sont testées.
4 points	i. Justifiez que la variable aléatoire qui compte le nombre de voitures respectant les normes requises suit une loi binomiale et dites ce que calcule l'expression suivante : $C_{20}^{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^{17}$
3 points	ii. Quelle est la probabilité qu'aucune de ces voitures ne respecte les normes requises ?
3 points	iii. Quelle est la probabilité qu'au moins 10 voitures respectent les normes requises?
2 points	c) En moyenne 60 voitures sont inspectées chaque semaine. En une semaine, quel est le nombre moyen de voitures respectant les normes requises ?

Dans tout l'exercice, il y a tellement de voitures qu'on peut faire l'approximation que lorsqu'on en choisit plusieurs, tout se passe comme s'il s'agissait d'un tirage avec remise (alors que, bien sûr, c'est un tirage sans remise, ce sont des voitures différentes) : c'est-à-dire que la probabilité que chaque voiture soit conforme reste la même, de la 1e à la dernière.

a) Si on a lu tout l'exercice, on voit qu'à la question 2 c'est une loi binomiale, et à la question 1 c'est donc la même chose (avec 2 voiture plutôt que 20). Si on ne l'a pas vu, on peut aussi dessiner un arbre pour modéliser la situation. R = "La voiture respecte les normes".



L'événement demandé est sur trois branches. On fait la somme, on obtient :

$$P(\text{au moins une voiture respecte}) = 0,6 \times 0,6 + 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6 = \boxed{0,84}$$

b) i. Comme dit dans l'introduction, on peut estimer qu'il y a tellement de voitures que chacune a 40% de chances de respecter, et de plus, les voitures entre elles peuvent être supposées indépendantes. Du coup, si on note X la variable aléatoire du nombre de voitures qui respectent les normes, on a répétition 20 fois de la même expérience aléatoire, de manière indépendante : c'est bien une situation où on a une loi binomiale.

On reprend le formulaire qui nous dit que :

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Ici, on a $k = 3$ et $p = 0,6$ est la probabilité que la voiture respecte les normes. On retrouve bien la formule du formulaire qui est $P(X = 3)$ c'est-à-dire la probabilité que $\boxed{\text{exactement 3 voitures respectent les normes}}$.

ii. La probabilité qu'aucune voiture ne respecte les normes c'est $P(X = 0)$. On va dans Menu, Probabilités, Distributions, Binomiale FdR et on obtient $binomCdf(20, 0.6, 0, 0) = \boxed{1,09951 \times 10^{-8}}$ (une probabilité très, très faible).

iii. La probabilité qu'au moins 10 voitures respectent les normes c'est $P(X \geq 10)$. On obtient $binomCdf(20, 0.6, 10, 20) = \boxed{0,872479}$.

c) Le nombre moyen de voitures respectant les normes, c'est l'espérance de la variable aléatoire. Ici, l'expérience aléatoire a changé (on a 60 voitures au lieu de 2 en a) puis 20 en b)), donc le formulaire nous dit que $E(X) = n \times p = 60 \times 0,6 = \boxed{36}$.

Exercice B4 — Statistiques (20 points)

Un laboratoire a mesuré la puissance (kW) et la consommation (litres pour cent kilomètres) de 7 différents modèles de voitures. Le tableau ci-dessous montre les résultats obtenus :

x_i : puissance (kW)	70	75	80	85	90	95	100
y_i : consommation (L/100km)	8	10,5	8,3	8,8	9	9,8	10

2 points — a) Représenter le nuage de points (x_i, y_i).

4 points — b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x_i et y_i et une équation de la droite de régression de y en x. Ajouter la droite au nuage de points.

3 points — c) Les points du nuage qui sont situés à plus de 1 L/100 km au-dessus ou en dessous de la droite sont considérés, dans ce cas, comme aberrants. Y a-t-il des points aberrants ? Justifier la réponse.

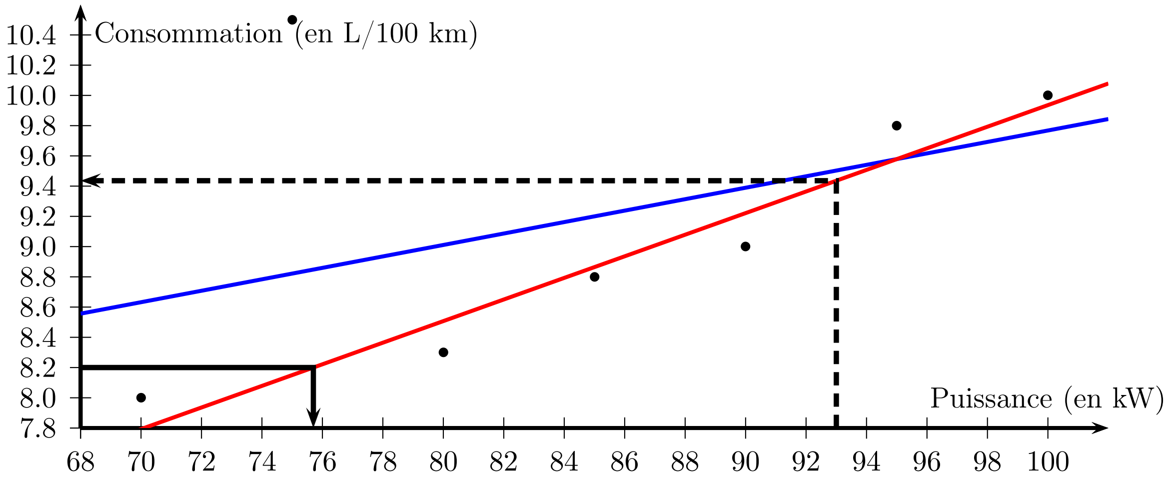
Pour les questions suivantes, il est décidé de ne pas prendre en compte le modèle de voiture dont la puissance est de 75 kW et de n'utiliser que les données correspondant aux 6 autres modèles restants.

4 points — d) Un ajustement linéaire entre la puissance et la consommation est-il maintenant justifié ? Déterminer une équation de la nouvelle droite de régression de y en x.

3 points — e) En utilisant ce modèle, estimer la consommation d'une voiture dont la puissance est 93 kW.

4 points — f) Estimer la puissance d'une voiture dont la consommation est 8,2 litres pour cent kilomètres.

a) On va dans un nouveau classeur et on rentre les données. Dans doc on insère une nouvelle feuille de "Données et statistiques" qui nous donne automatiquement une échelle utile.



b) On revient dans la feuille de classeur, et on demande la régression linéaire. La calculatrice nous répond que $\boxed{r \approx 0,44}$ et que l'équation de la droite de régression est $\boxed{y = 0,037857x + 5,98214}$. Pour tracer la droite, on calcule deux valeurs (en bleu sur le graphique).

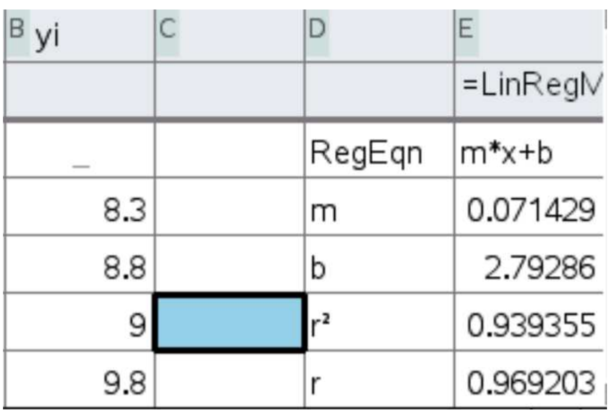
c) Il y a clairement un point aberrant : le point du nuage d'abscisse 75 a pour coordonnées $(75; 10,5)$ alors que le point de la droite a pour ordonnée $f1(75) = 8,82143$ (quand on ne change aucun réglage, ça stocke la droite de régression dans la fonction $f1$, sinon on peut redéfinir $f1(x) := 0,037857 \cdot x + 5,98214$ bien sûr).

Du coup, le point est à $1,67857$ de la droite, ce qui est bien plus que 1. C'est un point aberrant.

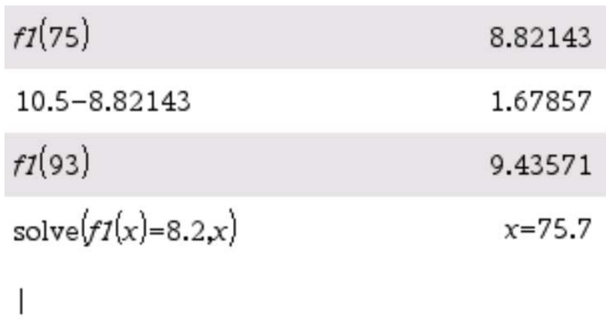
d) On retourne dans le classeur et on supprime la ligne $(75; 10,5)$. Les calculs sont automatiquement mis à jour, on peut les refaire si on n'a pas confiance. La calculatrice nous dit que maintenant $r = 0,969203$ donc est bien $> 0,9$, l'ajustement affine $\boxed{\text{est justifié}}$. La nouvelle équation de la droite de régression est $\boxed{y = 0,071429x + 2,79286}$.

e) On peut tracer cette nouvelle droite sur le graphique (en rouge sur le graphique) et lire graphiquement (traits de construction en noir pointillé), ou bien utiliser la fonction $f1$ dans la calculatrice : $f1(93) = \boxed{9,43571}$.

f) C'est la même question à l'envers, on demande à la calculatrice de résoudre $solve(f1(x) = 8.2, x)$ et elle nous répond $x = \boxed{75,7}$. On pouvait aussi lire sur le graphique (traits de construction en noir plein).



B yi	C	D	E
			=LinRegM
_		RegEqn	m*x+b
8.3		m	0.071429
8.8		b	2.79286
9		r²	0.939355
9.8		r	0.969203



f1(75)	8.82143
10.5−8.82143	1.67857
f1(93)	9.43571
solve(f1(x)=8.2,x)	x=75.7