Exercice A1 — Analyse **5 points**

5 points	On considère la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 3x - 2$. Calculer l'aire de la surface bornée délimitée par le graphique de f et l'axe des abscisses.

Pour calculer l'aire, il faut d'abord savoir quelles sont les bornes pour x. Il faut donc calculer les racines de f. Résoudre $f(x) = 0$, c'est résoudre une équation du second degré $-x^2+3x-2 = 0$. Ici, $a = -1; b = 3; c = -2$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1$.

Comme $\Delta > 0$, on a deux solutions $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. La première solution est $x1 = \dfrac{-3+\sqrt{1}}{2 \times (-1)} = \dfrac{-3+1}{-2} = \dfrac{-2}{-2} = 1$. La seconde solution est $x2 = \dfrac{-3-\sqrt{1}}{2 \times (-1)} = \dfrac{-3-1}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2$.

f est une fonction polynomiale du second degré, tournée vers le bas car $a = -1 < 0$. Donc, entre 1 et 2, f est positive. Il faut donc calculer $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$. On calcule une primitive F de f, puis on utilise la formule du formulaire $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, avec une primitive $F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 3\dfrac{x^2}{2} - 2x$

On peut maintenant faire le calcul de l'intégrale $F(2)-F(1) = \left(-\dfrac{2^3}{3} + 3\dfrac{2^2}{2} - 2 \times 2\right) - \left(-\dfrac{1^3}{3} + 3\dfrac{1^2}{2} - 2 \times 1\right) = -\dfrac{8}{3} + 6 - 4 - \left(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{2} - 2\right) = -\dfrac{8}{3} + 2 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{2} + 2 = -\dfrac{7\times 2}{3\times 2} + \dfrac{4\times 6}{1\times 6} - \dfrac{3\times 3}{2\times 3} = -\dfrac{14}{3} + \dfrac{24}{6} - \dfrac{9}{6} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$.

Exercice A2 — Analyse **5 points**

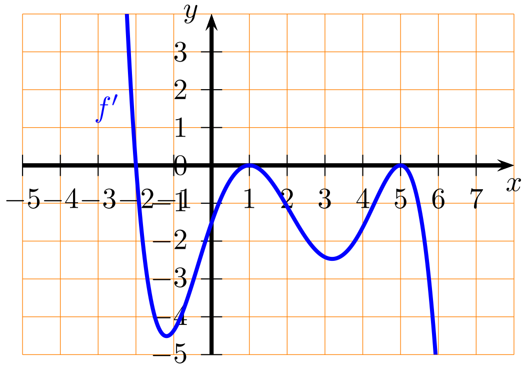
5 points	Résoudre l'équation $\ln(2x-5) = 0$.

$$\begin{aligned} \ln(2x-5) &= 0 \\ e^{\ln(2x-5)} &= e^0 && \text{Exponentielle} \\ 2x-5 &= 1 && e^{\ln(a)} = a \\ 2x &= 6 && +2 \\ x &= 3 && \div 2 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{3\}}$.

Exercice A3 — Analyse **5 points**

	Le diagramme ci-dessous montre le graphique de f', la dérivée d'une fonction f :



5 points	Déterminer la (ou les) valeur(s) pour laquelle (ou lesquelles) la fonction f admet un extremum. Donner à chaque fois le type d'extremum dont il s'agit.

On lit graphiquement le signe de f' pour en déduire les variations de f.

Ainsi f a un seul extremum qui est un $\boxed{\text{maximum}}$ à l'abscisse $\boxed{-2}$ (effectivement, quand f' s'annule sans changer de signe, cela ne change pas les variations de f).

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$	
Var $f(x)$		↗		↘		↘		↘	

Exercice A4 — Analyse **5 points**

5 points	On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$. Déterminer la primitive F de f telle que $F(2) = 1$.

Ici on commence par trouver toutes les primitives :

$$f(x) = x^3 + 3 \times x^2 - 10 \times x.$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + 3 \times \frac{x^3}{3} - 10 \times \frac{x^2}{2}.$$

$$\boxed{F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 5x^2 + k}.$$

1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dans chaque terme garder la constante et prendre une primitive de la fonction de référence.

3 : Pour trouver toutes les primitives, on rajoute une constante k.

Maintenant, il faut que F vérifie la condition $F(2) = 1$:

$$\begin{aligned} F(2) &= 1 & &\text{On utilise l'expression de } F \\ \frac{2^4}{4} + 2^3 - 5 \times 2^2 + k &= 1 & &\text{On calcule} \\ 4 + 8 - 20 + k &= 1 & &\text{On simplifie} \\ -8 + k &= 1 & &+8 \\ k &= 9 \end{aligned}$$

Ainsi la primitive cherchée est la fonction $\boxed{F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 5x^2 + 9}$.

Exercice A5 — Analyse **5 points**

5 points	On considère la fonction f définie par $f(x) = 3\ln(2x - 1) + 1$. Établir une équation de la tangente au graphique de f au point d'abscisse $x = 1$.

On utilise la formule de la tangente au point d'abscisse a : $\boxed{y = f'(a) \times (x - a) + f(a)}$.

Ici, $f'(x) = 3 \times \frac{2}{2x - 1} = \frac{6}{2x - 1}$ et $a = 1$ donc on a $f'(1) = \frac{6}{2 \times 1 - 1} = \frac{6}{1} = 6$ et $f(1) = 3\ln(1) + 1 = 3 \times 0 + 1 = 1$, d'où l'équation $y = 6 \times (x - 1) + 1$ c'est-à-dire $\boxed{y = 6x - 5}$.

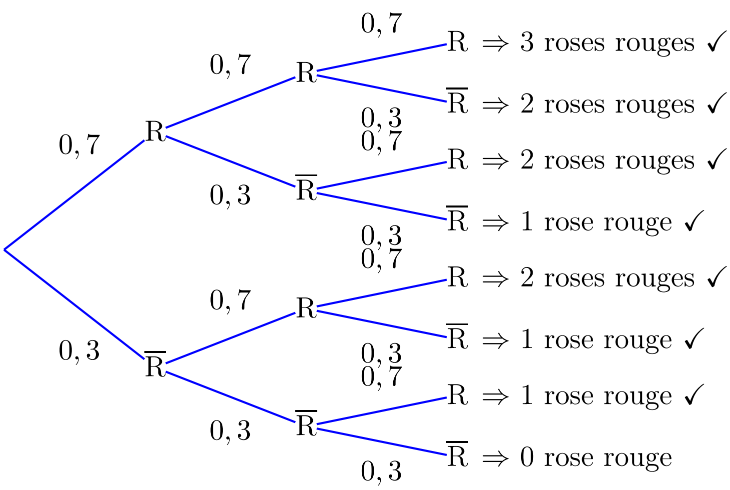
Exercice A6 — Probabilités **5 points**

5 points	Des roses ont éclos dans un jardin. 70 % de ces roses sont rouges. Un visiteur choisit au hasard 3 de ces roses. Calculer la probabilité que ce visiteur ait choisi au moins une rose rouge.

On va dessiner un arbre pour modéliser la situation. R = "une rose rouge" et $\overline{\text{R}}$ = "une rose d'une autre couleur".

Le plus simple est de voir que seule la branche tout en bas ne correspond à pas à l'événement demandé. Donc on doit calculer :

$P = 1 - 0,3^3 = 1 - 0,027 = \boxed{0,973}$.



Exercice A7 — Probabilités **5 points**

Les prévisions météorologiques sont les suivantes pour les prochaines vacances :

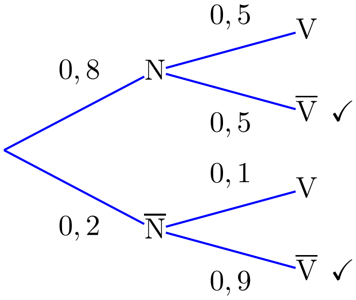
- la probabilité qu'il fasse nuageux est de 0,8
- s'il fait nuageux, la probabilité qu'il fasse du vent vaut 0,5
- s'il ne fait pas nuageux, la probabilité qu'il ne fasse pas de vent vaut 0,9

5 points — Calculer la probabilité qu'il ne fasse pas de vent.

On va dessiner un arbre pour modéliser la situation. N = "il fait nuageux" et V = "il fait du vent".

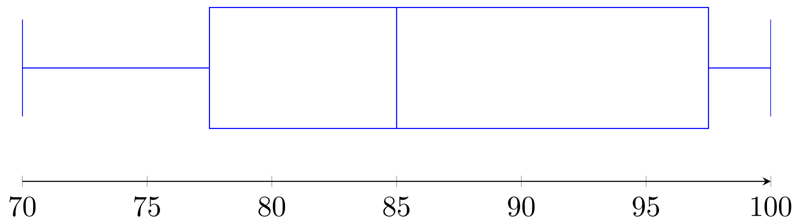
L'événement demandé est sur deux branches. On fait la somme, on obtient :

$P = 0,8 \times 0,5 + 0,2 \times 0,9 = 0,4 + 0,18 = \boxed{0,58}$



Exercice A8 — Statistiques **5 points**

Les résultats du groupe d'élèves A à un test de mathématiques sont consignés dans le diagramme suivant :

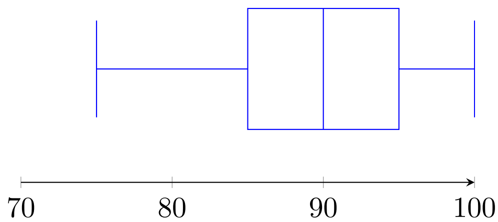


Le groupe B a obtenu les notes suivantes lors du même test :

75; 85; 85; 90; 90; 95; 100

5 points — Représenter les résultats du groupe B par une boîte à moustaches, puis comparer et commenter les résultats des deux groupes.

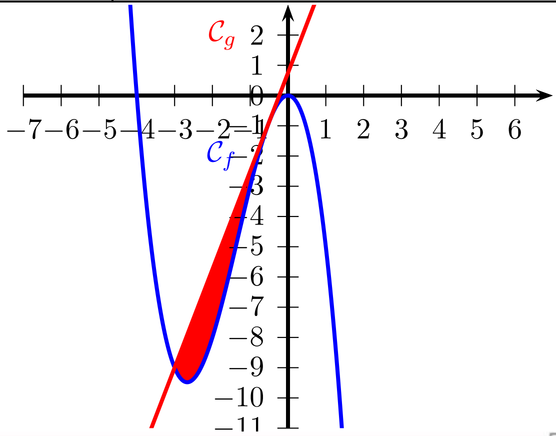
- 7 valeurs
- Médiane : son rang est $\frac{7+1}{2} = 4$. La 6e valeur est $\boxed{90}$.
- Q1 : $\frac{7}{4} = 1,75$ donc c'est la 2e valeur. C'est $\boxed{85}$.
- Q3 : $\frac{7 \times 3}{4} = 5,25$ donc c'est la 6e valeur. C'est $\boxed{95}$.

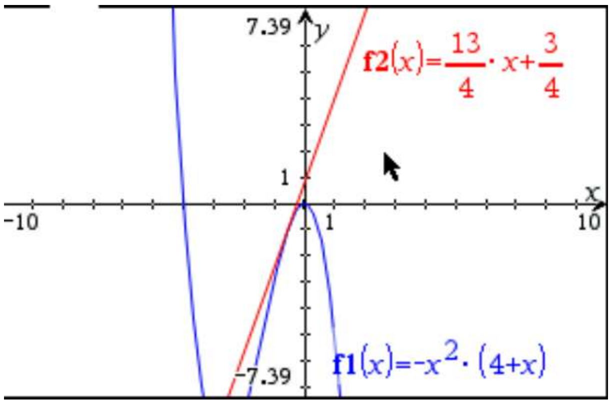


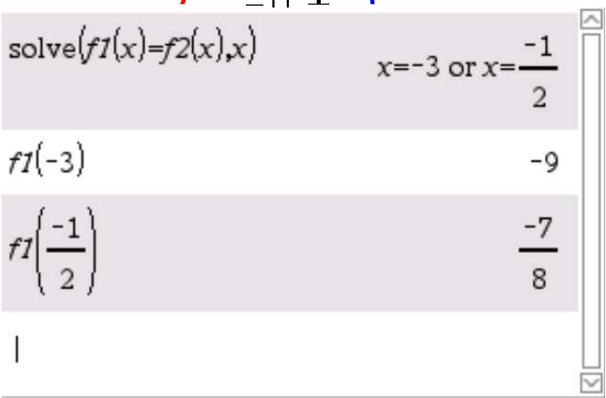
Le groupe B est beaucoup plus homogène et a des meilleurs résultats que le groupe A.

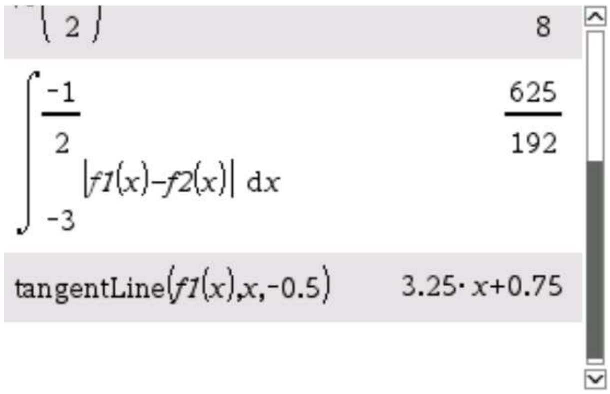
Exercice B1 — Analyse **10 points**

	Utiliser la calculatrice en a) et b).
	On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = -x^2(4+x)$ et $g(x) = \frac{13}{4}x + \frac{3}{4}$.
3 points	a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des graphiques de f et g.
4 points	b) Calculer l'aire de la surface bornée délimitée par les graphiques de f et de g.
3 points	c) Établir une équation de la tangente au graphique de f au point d'abscisse $x = -0,5$.









a) On rentre $f1(x) = -x^2(4+x)$ et $f2(x) = \frac{13}{4}x + \frac{3}{4}$ dans le menu graphique de la calculatrice. Pour trouver les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on tape `solve(f1(x) = f2(x), x)`. La calculatrice nous répond que c'est en $x = -3$ et $x = -\frac{1}{2}$.
On calcule $f(-3) = -9$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{8}$ d'où les points d'intersection $\boxed{(-3; -9) \text{ et } \left(-\frac{1}{2}; -\frac{7}{8}\right)}$.

b) Ici, l'aire fermée entre les graphes se trouve entre $x = -3$ et $x = -\frac{1}{2}$ (on a trouvé les points d'intersection à la question précédente). Donc, on tape à la calculatrice : $\int_{-3}^{-\frac{1}{2}} |f1(x) - f2(x)| dx = \boxed{\frac{625}{192}} \approx 3,26$.

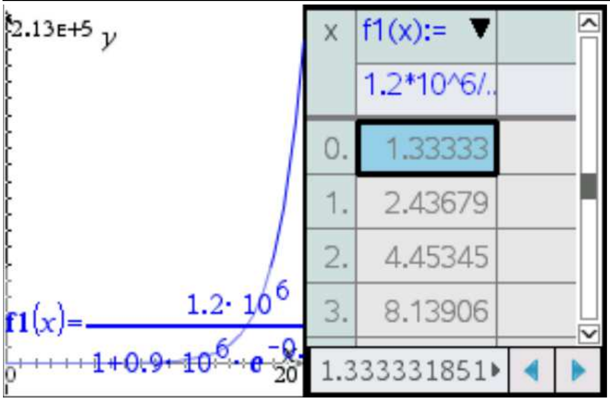
c) Ici on peut soit utiliser directement l'outil `tangentLine` de la calculatrice, soit appliquer la formule de l'équation de la tangente au point d'abscisse a, pour $a = -0,5$:

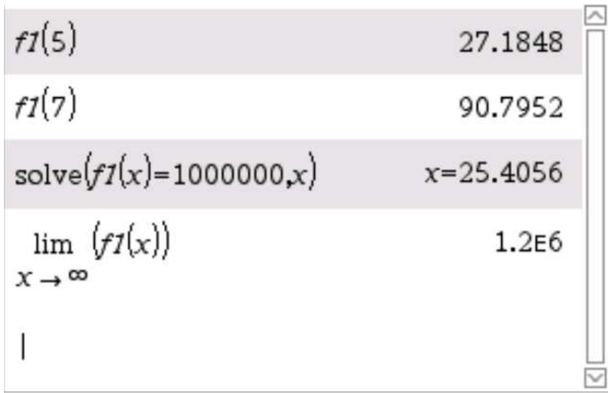
$$y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$$

La calculatrice donne $\boxed{y = 3,25x + 0,75}$.

Exercice B2 — Analyse **15 points**

	Utiliser la calculatrice pour tous les calculs de cette question.
	Le coronavirus se répand parmi la population de Bruxelles (1,2 millions d'habitants au total). Un modèle mathématique du nombre de personnes infectées en fonction du temps est donné par la fonction f définie par : $$f(x) = \frac{1,2 \cdot 10^6}{1 + 0,9 \cdot 10^6 \cdot \mathrm{e}^{-0,603x}}$$ où x est le temps en jours à partir d'aujourd'hui et $f(x)$ est le nombre de personnes infectées à Bruxelles au temps x.
4 points	a) Calculer, selon ce modèle, le nombre de personnes infectées à Bruxelles dans 5 jours et dans une semaine.
3 points	b) Tracer le graphique de f pour $0 \leq x \leq 20$.
4 points	c) Quand le nombre de personnes infectées à Bruxelles sera-t-il de 1 million ?
4 points	d) Est-ce que l'augmentation du nombre de personnes infectées va s'arrêter, et si oui, quand ?





a) On rentre $f1(x) = \dfrac{1,2 \cdot 10^6}{1 + 0,9 \cdot 10^6 \cdot \mathrm{e}^{-0,603x}}$ dans le menu graphique de la calculatrice. On modifie la fenêtre (menu, 4 - Fenêtre/Zoom, 1 - Réglages de la fenêtre) pour avoir x de 0 à 20, puis on remodifie la fenêtre pour ajuster automatiquement les valeurs de y (menu, 4 - Fenêtre/Zoom, A - Zoome ajusté à la fenêtre). On demande la valeur $f1(5) \approx \boxed{27}$ et $f1(7) \approx \boxed{91}$ ce qu'il veut dire qu'on peut estimer qu'il y aura environ 27 personnes contaminées à Bruxelles dans 5 jours et environ 91 dans une semaine.

b) Dans la fenêtre graphique, on appuie sur Ctrl + T pour avoir le tableau de valeurs pour recopier le graphique. Vu les données, on peut prendre 1 cm pour 2 jours sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 20 000 personnes infectées sur l'axe des ordonnées.

c) On va demander à la calculatrice de résoudre `solve(f1(x) = 1000000, x)`. Elle nous répond que c'est pour $t \approx 25,40$, donc c'est $\boxed{\text{dans 25 jours et demi}}$.

d) Le graphique tracé semble signifier que le nombre de personnes infectées continue de monter sans s'arrêter. Pourtant, ce nombre finit par se stabiliser, ce qu'on peut voir de deux manières : en changeant la fenêtre (valeur maximale de x égale à 100 par exemple, puis encore plus grande pour être bien sûr que la courbe finit par être quasiment horizontale), ou bien de manière plus sûre calculer la limite de la fonction quand x tend vers $+\infty$ (la calculatrice donne une valeur finie, $1.2 \cdot 10^6$, ce qui veut bien dire que l'augmentation du nombre de personnes infectées finit bien par s'arrêter). Si on regarde les valeurs dans la table de valeurs, à partir de $x = 44$ on voit que la calculatrice donne toujours cette valeur, et même quelques jours avant ça restait très proche, donc au bout d'$\boxed{\text{un peu plus d'un mois}}$ environ.

Exercice B3 — Probabilités **15 points**

Utiliser la calculatrice en c), d) et e).

Headphones R Us produit et commercialise des casques sans fil à deux endroits : à l'usine d'Alton, et à celle de Bath :

- l'usine d'Alton produit 60 % des casques, et celle de Bath 40 %
- 2 % des casques produits à l'usine d'Alton sont défectueux
- 4 % des casques produits par l'usine de Bath sont défectueux

On choisit au hasard un casque parmi ceux produits par Headphones R Us.

2 points a) Calculer la probabilité que ce casque soit défectueux.

3 points b) Calculer la probabilité que ce casque ait été produit à l'usine de Bath sachant qu'il est défectueux.

Un acheteur commande 400 casques choisis au hasard parmi ceux produits par l'usine de Bath. Dans cette commande, on note X la variable aléatoire donnant le nombre de casques défectueux.

4 points c) Justifiez que X suit une loi de probabilité binomiale, puis calculer la moyenne et l'écart-type de cette variable.

3 points d) Calculer la probabilité de trouver exactement 4 casques défectueux dans cette commande.

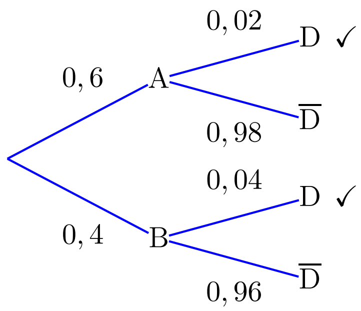
3 points e) Calculer la probabilité de trouver au moins 7 et au plus 15 casques défectueux dans cette commande.

a) On va dessiner un arbre pour modéliser la situation.

A = "Alton", B = "Bath", et D = "casque défectueux".

L'événement demandé est sur deux branches. On fait la somme, on obtient :

$P = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,04 = \boxed{0,028}$



b) On demande ici de calculer $P_{\text{D}}(\text{B}) = \dfrac{P(\text{D} \cap \text{B})}{P(\text{D})}$. Toujours par lecture de l'arbre, $P(\text{D} \cap \text{B}) = 0,4 \times 0,04 = 0,016$. Donc $P_{\text{D}}(\text{B}) = \dfrac{0,016}{0,028} = \boxed{\dfrac{4}{7}} \approx 0,57$.

c) Dans cette configuration, il y a tellement de casques produits qu'on peut faire l'approximation que lorsqu'on en choisit plusieurs (ici, 400), tout se passe comme s'il s'agissait d'un tirage avec remise (alors que, bien sûr, c'est un tirage sans remise, ce sont des casques différents) : c'est-à-dire que la probabilité que chaque casque soit défectueux reste la même, du 1er au dernier. On a répétition 400 fois de la même expérience aléatoire, de manière indépendante : c'est bien une situation où on a une loi binomiale avec $n = 400$ et $p = 0,04$.

On reprend le formulaire qui nous dit que $E(x) = n \cdot p$ et $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Du coup, la moyenne de cette variable est de $400 \times 0,04 = \boxed{16}$ et l'écart-type est de $\sqrt{400 \times 0,04 \cdot (1 - 0,04)} \approx \boxed{3,9}$.

d) La probabilité de trouver exactement 4 casques défectueux dans cette commande, c'est $P(X = 4)$. On va dans Menu, Probabilités, Distributions, Binomiale FdR et on obtient $\text{binomCdf}(400, 0.04, 4, 4) \approx \boxed{0,000257}$.

e) La probabilité de trouver au moins 7 et au plus 15 casques défectueux dans cette commande, c'est $P(7 \leq X \leq 15)$. On obtient $\text{binomCdf}(400, 0.04, 7, 15) \approx \boxed{0,461}$.

Exercice B4 — Statistiques **20 points**

Utiliser la calculatrice en c) et d).

Un vendeur de chaussures a remarqué que « Plus il pleut, plus je vends de chaussures ». Pour en savoir plus, il réalise une étude sur 10 semaines. Le tableau ci-dessous indique, pour chacune des 10 semaines de cette étude, le nombre d'heures de pluie x_i et le nombre de paires de chaussures vendues y_i :

x_i (heures de pluie)	10	2	1	15	14	5	10	12	3	12
y_i (nombre de paires de chaussures vendues)	34	19	17	46	23	24	36	40	20	42

3 points — a) Tracer un graphique en nuage de points représentant les données du tableau.

2 points — b) Pensez-vous que la remarque du vendeur est toujours vraie, ou bien y a-t-il une (ou des) semaine(s) qui ne correspond(ent) pas à sa remarque ?

Pour les questions suivantes, on retire la semaine où $x_i = 14$ et $y_i = 23$, et on souhaite réaliser une régression linéaire de y en x.

4 points — c) Donner le coefficient de corrélation linéaire r, en arrondissant au millième (3 décimales). Expliquez en quoi le résultat vous permet de confirmer la remarque du vendeur.

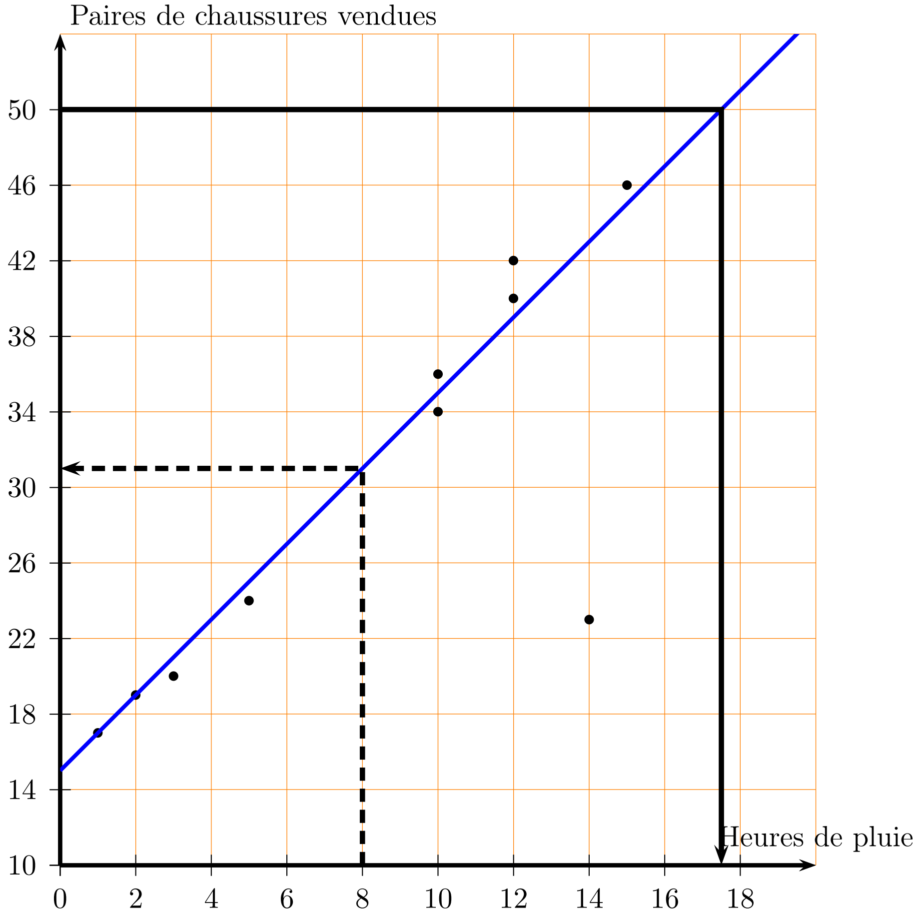
4 points — d) Établir une équation de la forme $y = m \cdot x + b$ de la droite de régression, en arrondissant les nombres m et b au millième (3 décimales).

Pour e) et f), utiliser le modèle de régression linéaire $y = 2x + 15$.

4 points — e) Ajouter cette droite de régression au diagramme de a) puis estimez le nombre de paires de chaussures vendues lors d'une semaine où il pleuvrait 8 heures.

3 points — f) Estimez le nombre d'heures de pluie lors d'une semaine où 50 paires de chaussures seraient vendues.

a) On va dans un nouveau classeur et on rentre les données. Dans doc on insère une nouvelle feuille de "Données et statistiques" qui nous donne automatiquement une échelle utile (ici on a choisi 1 cm pour 2 heures de pluie et 1 cm pour 4 paires de chaussures vendues).



b) Il y a clairement un point aberrant : quasiment tous les points ont l'air alignés sauf le point du nuage $(14; 23)$. Donc, c'est presque toujours vrai que "plus il pleut, plus il y a de paires de chaussures vendues", sauf pour cette semaine particulière (c'était peut-être les vacances ?).

c) On revient dans la feuille de classeur, et on supprime la ligne $(14; 23)$, avant de demander la régression linéaire. La calculatrice nous répond que $\boxed{r \approx 0,995}$ donc est bien $> 0,9$, l'ajustement affine $\boxed{\text{est justifié}}$, et cela confirme bien la remarque du vendeur car $r > 0$ signifie que globalement, y monte quand x monte.

d) L'équation de la droite de régression est $\boxed{y = 2,152x + 14,147}$.

e) On a tracé cette droite sur le graphique (en bleu). On peut lire graphiquement (traits de construction en noir pointillé), ou bien rentrer la fonction $f(x) = 2x + 15$ dans la calculatrice et demander $f(8) = \boxed{31}$.

f) C'est la même question à l'envers, on demande à la calculatrice de résoudre `solve(f(x) = 50, x)` et elle nous répond $x = \boxed{17,5}$. On pouvait aussi lire sur le graphique (traits de construction en noir plein).

	B yi	C	D	E
=				=LinRegM
2	19		RegEqn	m*x+b
3	17		m	2.15257
4	46		b	14.1467
5			r²	0.990556
6	24		r	0.995267

f(x):=2·x+15	*Terminé*
f(8)	31
solve(f(x)=50,x)	x=17.5