Lycée Blaise Pascal **Lundi 14 avril 2014**

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR BLANC DE MATHÉMATIQUES – SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS –

Durée de l'épreuve : 2 heures

Coefficient : 2

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4.

Exercice 1 **5 points**

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. On inscrira sur la copie le numéro et la lettre de la réponse choisie, accompagnée à chaque fois d'une justification.

Question 1 - Logique

Soit f une fonction de la variable x, définie sur $\mathbb{R}$. On considère l'énoncé suivant : « Il existe au moins un réel x tel que $f(x) > 0$ ». La négation de cette proposition est :

A : « Il existe au moins un réel x tel que $f(x) < 0$ » ;
B : « Il existe au moins un réel x tel que $f(x) \leq 0$ » ;
C : « Pour tout réel x, $f(x) < 0$ » ;
D : « Pour tout réel x, $f(x) \leq 0$ ».

Question 2 - Matrices

Soit a un nombre réel non nul. On considère $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice M^2 est égale à :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

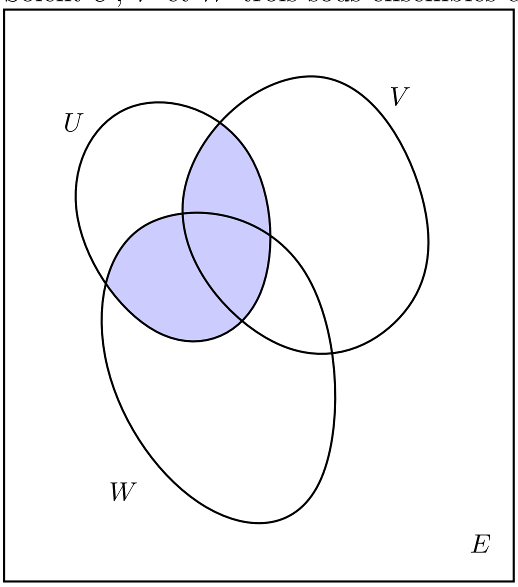
Question 3 - Ensembles

Soit E un ensemble à 2 éléments. L'ensemble $E^3 = E \times E \times E$ contient :

A : 2 éléments ;
B : 5 éléments ;
C : 6 élements ;
D : 8 éléments.

Question 4 - Ensembles

Soient U, V et W trois sous-ensembles d'un ensemble E, qu'on a dessinés ci-dessous.



La partie que l'on a grisée correspond à :

A : $(U \cup V) \cap (U \cup W)$;
B : $(U \cap V) \cup (U \cap V \cap W)$;
C : $U \cap (V \cup W)$;
D : $\complement_U (U \cap V \cap W)$.

Question 5 - Suites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de terme initial $u_0 = -2$ et de raison $q = -0,5$. Cette suite :
A : n'a pas de limite ;
B : a pour limite -2 ;
C : a pour limite 0 ;
D : a pour limite $-\infty$.

Exercice 2 — 6 points

Une usine fabrique chaque jour trois produits A, B et C à partir de pièces de modèles m_1, m_2 et m_3. Le nombre de pièces nécessaires à la fabrication de ces produits est récapitulé dans le tableau suivant :

	A	B	C
m_1	3	2	4
m_2	2	1	2
m_3	1	3	3

On note M la matrice correspondant, c'est-à-dire $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

La production journalière peut s'écrire sous forme d'une matrice colonne $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où a (respectivement b, c) représente le nombre de produits A (respectivement B, C) fabriqués le jour concerné. Une telle matrice X s'appelle le « programme de production » du jour considéré.

1. Expliquez le 4 dans la matrice M.
2. Un certain jour, le programme de production est égal à $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

   Déterminer, par calcul matriciel, le nombre de pièces de chaque modèle dont il faut disposer pour ce programme de production.
3. Dans cette question, x et y sont deux nombres réels, et on considère la matrice $P = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer les coefficients de la première ligne du produit matriciel PM.

   (b) Déterminer les réels x et y tels que le produit matriciel PM soit égal à la matrice unité $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Dans la suite de l'exercice on prend $x = -1$ et $y = 2$ et l'on admet que, dans ce cas, $PM = I_3$.
   Soient X et Y deux matrices à une colonne et trois lignes. Démontrer que si $MX = Y$ alors $X = PY$.

   (d) On dispose un autre jour de 67 pièces de modèle m_1, 36 pièces de modèle m_2 et 59 pièces de modèle m_3.
   Déterminer, par calcul matriciel, le programme de production qui épuisera le stock de cette journée.

Exercice 3 **6 points**

À la ducasse annuelle de Châteauroux, l'un des stands est constitué d'un jeu de devinettes. Le stand contient trois coffrets : un petit, un moyen et un grand. Chacun de ces coffrets peut contenir un louis d'or, et le but est d'ouvrir un coffret qui en contienne un.

Nous noterons A, B et C les variables propositionnelles correspondant aux faits suivants :

- A = ≪ le petit coffret contient un louis d'or. ≫
- B = ≪ le coffret moyen contient un louis d'or. ≫
- C = ≪ le grand coffret contient un louis d'or. ≫

Le meneur de jeu étant absent, l'un des participants affirme la proposition P suivante : ≪ Soit le coffret moyen contient un louis d'or, soit il n'en contient pas mais le grand en contient un. ≫

1. Exprimer la proposition P sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant de A, B et C.
2. Établir la table de vérité de la proposition P.
3. Le meneur de jeu, qui dit toujours la vérité, revient et affirme la chose suivante : M = ≪ Le participant s'est trompé. ≫. Ainsi la proposition P est fausse.
   À l'aide du calcul des propositions, démontrer que $M = \neg\, B \wedge \neg\, C$.
4. Faire une phrase expliquant à quelle situation (sur les trois coffrets) correspond l'affirmation du meneur de jeu.
5. Le meneur de jeu nous indique maintenant la proposition :
   J = ≪ L'un au moins des coffrets contient un louis d'or. ≫
   (a) Exprimer la proposition J sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant de A, B et C.
   (b) Quel(s) coffret(s) peut-on ouvrir et être certains d'y trouver un louis d'or ?

Exercice 4 **3 points**

Le codage ASCII définit, pour les 128 caractères usuels (lettres majuscules et minuscules, chiffres, quelques caractères spéciaux) un code binaire sur 8 bits, exprimé en hexadécimal.

1. Le code ASCII de la virgule est $2C_{(16)}$. Donner ce code en binaire.
2. Le code ASCII de la lettre 'A' (majuscule) est $41_{(16)}$, puis les autres lettres majuscules se suivent par ordre alphabétique.
   (a) A quelle lettre correspond le code binaire $0100\ 1010_{(2)}$?
   (b) Quel est le code ASCII de la lettre 'Z' (majuscule) ?
   (c) Pour passer du code ASCII d'une lettre en majuscule au code de cette lettre en minuscule, il faut ajouter $32_{(10)}$. En déduire le code ASCII de la lettre 'a' (minuscule).