1 Cours

Soit A une matrice de taille $e \times f$ et B une matrice de taille $g \times h$.
À quelle condition sur e, f, g, h peut-on effectuer le produit $C = A \times B$?
Quelle est alors la taille de C en fonction de e, f, g, h ?

2 Exercices

Dans l'ensemble des exercices, lorsqu'un calcul matriciel est demandé, on pourra donner directement le résultat.

Exercice 1 : Matériel informatique

Un petit fournisseur de matériel informatique propose trois formules de vente à ses clients :

- une formule F1 « clavier + souris » à 12 euros ;
- une formule F2 « clavier + souris + clé USB » à 16 euros ;
- une formule F3 « clavier » à 10 euros.

Pour chacune de ces formules, dans le tableau suivant sont indiqués le coût d'achat du matériel, le temps moyen nécessaire au conditionnement de chaque formule et le prix demandé :

	Formule F1	Formule F2	Formule F3
Coût d'achat en euros	3	4	2
Temps en minutes	8	10	6
Prix de vente en euros	12	16	10

1. (a) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 8 & 10 & 6 \\ 12 & 16 & 10 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$.
   Effectuer le produit matriciel MC.

   (b) On considère le cas où 10 clients optent pour la formule F1, 8 pour la formule F2 et 14 pour la formule F3.
   Donner la signification de chacun des coefficients du produit matriciel MC en termes de coût d'achat, de temps et de prix de vente.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & -1,5 & 0,5 \\ -2 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer les coefficients de la première ligne du produit matriciel PM.

   (b) Déterminer le réel a tel que le produit matriciel PM soit égal à la matrice unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Dans la suite de l'exercice on prend $a = -1$ et l'on admet que, dans ce cas, $PM = I$.
   Soient X et Y deux matrices à une colonne et trois lignes. Démontrer que si $MX = Y$ alors $X = PY$.

4. On sait que le fournisseur a dépensé 100 euros pour l'achat du matériel, que le conditionnement a nécessité 270 minutes et que la recette pour ces trois formules a été de 430 euros.
   Déterminer, pour chacune des formules, le nombre de clients l'ayant choisie.

Exercice 2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer deux nombres α et β tels que $A = \alpha J + \beta I_3$
   (b) Exprimez J^2 en fonction de J.
   (c) Déduisez-en que $A^2 = -5J + 16I_3$.
2. (a) A partir de la question précédente, prouvez que $A^2 + 5A = -4I_3$.
   (b) En déduire une matrice B telle que $A \times B = I_3$.

Exercice 3

On considère les matrices $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = MDN$.

1. Calculer le produit MN.
2. En déduire que $A^2 = MD^2N$ sans calculer explicitement les produits. On admettra dans la suite que pour tout entier naturel n, $A^n = MD^nN$.
3. On suppose qu'il existe trois suites a, b et c telles que pour tout entier naturel n, on peut écrire $D^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 \\ 0 & b_n & 0 \\ 0 & 0 & c_n \end{pmatrix}$.
   (a) En exploitant le fait que pour tout entier naturel n, $D^{n+1} = D^n \times D$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 2^n$.
   (c) Expliquer rapidement pourquoi on a de même $b_n = (-1)^n$ et $c_n = 3^n$.
4. Exprimer alors la matrice A^n en fonction de n.