Cours

On peut effectuer le produit $A \times B$ si et seulement si $\boxed{f = g}$, et $A \times B$ sera de taille $\boxed{e \times h}$.

Exercice 1 : Matériel informatique

1. (a) $MC = \boxed{\begin{pmatrix} 90 \\ 244 \\ 388 \end{pmatrix}}$.

   (b) Le 90 provient du calcul $3 \times 10 + 4 \times 8 + 2 \times 14$ (première ligne de M multipliée par C). Il s'agit donc du coût d'achat en euros du matériel pour satisfaire la commande de ces 32 clients.
   Le 244 provient du calcul $8 \times 10 + 10 \times 8 + 6 \times 14$ (deuxième ligne de M multipliée par C). Il s'agit donc du temps en minutes de conditionnement pour satisfaire la commande de ces 32 clients.
   Le 388 provient du calcul $12 \times 10 + 16 \times 8 + 10 \times 14$ (troisième ligne de M multipliée par C). Il s'agit donc du prix de vente en euros des commandes de ces 32 clients.

2. (a) En notant $P = \begin{pmatrix} L_1 \\ Q \end{pmatrix}$, où L_1 est la matrice ligne $\begin{pmatrix} a & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et Q la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1,5 & 0,5 \\ -2 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$, la première ligne J_1 de PM est alors égale au produit $J_1 = L_1 \times M$.
   Donc, $(PM)_{1,1} = a \times 3 + 2 \times 8 + (-1) \times 12 = 3a + 4$
   $(PM)_{1,2} = a \times 4 + 2 \times 10 + (-1) \times 16 = 4a + 4$
   $(PM)_{1,3} = a \times 2 + 2 \times 6 + (-1) \times 10 = 2a + 2$
   Ainsi la première ligne est égale à $J_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 3a+4 & 4a+4 & 2a+2 \end{pmatrix}}$.

   (b) En notant J la matrice constituée des deux dernières lignes de PM, on a de même $J = QM$. La calculatrice montre bien que $QM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Ainsi il suffit juste de déterminer a pour que $\begin{pmatrix} 3a+4 & 4a+4 & 2a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 3a+4 & = & 1 \quad (L_1) \\ 4a+4 & = & 0 \quad (L_2) \\ 2a+2 & = & 0 \quad (L_3) \end{cases}$$

   Il est clair que $\boxed{a = -1}$ est l'unique solution de ce système.

3. On vient de voir que $PM = I_3$, qui est la matrice neutre pour la multiplication, donc :

$$\begin{aligned} MX &= Y \\ PMX &= PY \quad \text{On multiplie à gauche par } P \\ I_3X &= PY \quad PM = I_3 \text{ d'après l'énoncé.} \\ X &= PY \quad I_3 \text{ est neutre pour la multiplication} \end{aligned}$$

4. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice colonne où x (respectivement y, z) est le nombre de clients, inconnu, ayant choisi la formule F_1 (respectivement la formule F_2, la formule F_3).
   L'énoncé nous dit que $MX = \begin{pmatrix} 100 \\ 270 \\ 430 \end{pmatrix}$, ainsi on peut calculer $X = P \times \begin{pmatrix} 100 \\ 270 \\ 430 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$.
   On peut donc conclure que $\boxed{\text{10 clients ont choisi la formule } F_1}$, $\boxed{\text{10 clients ont choisi } F_2}$ et $\boxed{\text{15 clients ont choisi } F_3}$.

Exercice 2

1. (a) On peut soit s'apercevoir directement que $\boxed{\alpha = 1 \text{ et } \beta = -4}$, mais si on ne le voit pas il suffit de calculer, pour tout α et β, $\alpha J + \beta I_3$, et regarder quand cela vaut la matrice A :

$$\alpha J+\beta I_3=\alpha\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha&\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+\beta&\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha+\beta&\alpha\\\alpha&\alpha&\alpha+\beta\end{pmatrix}$$

Cette matrice est égale à la matrice A si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcll}\alpha+\beta&=&-3&(L_1)\\\alpha&=&1&(L_2)\end{array}\right.$$

On déduit alors bien le résultat annoncé.

(b) La calculatrice nous donne $J^2=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=\boxed{3J}$.

(c) On peut évidemment calculer A^2, calculer $-5J+16I_3$, et s'apercevoir que ces deux matrices sont égales. Mais on n'aurait pas *déduit* le résultat des questions précédentes !

Afin de réellement *déduire* le résultat, calculons :

$A^2=(J-4I_3)^2=(J-4I_3)\times(J-4I_3)=J^2-4JI_3-4I_3J+16I_3^2=3J-4J-4J+16I_3=-5J+16I_3$.

2. (a) $A^2+5A=-5J+16I_3+5(J-4I_3)=-5J+16I_3+5J-20I_3=-4I_3$.

(b) En factorisant à gauche par A le membre de gauche on obtient $A(A+5I_3)=-4I_3$ soit $A\times\left(-\dfrac{1}{4}(A+5I_3)\right)=I_3$. Ainsi on a trouvé une matrice B vérifiant l'égalité de l'énoncé :

$$B=-\frac{1}{4}(A+5I_3)=-\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}\right)=\boxed{-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}}$$

Exercice 3

1. $\boxed{MN=I_3}$.
2. On peut alors en déduire que $A^2=(MDN)^2=MDNMDN=MDI_3DM=MDDM=MD^2N$.
3. (a) Soit n un entier naturel :

$$\begin{aligned}D^{n+1}&=D^n\times D\\\begin{pmatrix}a_{n+1}&0&0\\0&b_{n+1}&0\\0&0&c_{n+1}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}a_n&0&0\\0&b_n&0\\0&0&c_n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}a_{n+1}&0&0\\0&b_{n+1}&0\\0&0&c_{n+1}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}2a_n&0&0\\0&-1b_n&0\\0&0&3c_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On remplace par la formule donnée.

On effectue la multiplication.

On s'aperçoit donc, en regardant le coefficient ligne 1 colonne 1, que $a_{n+1}=2a_n$.

(b) Ainsi a est une suite géométrique de raison 2. Pour le terme initial, regardons $D^0=I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Puisqu'on peut également écrire $D^0=\begin{pmatrix}a_0&0&0\\0&b_0&0\\0&0&c_0\end{pmatrix}$, on déduit que $a_0=1$.

Ainsi pour tout entier naturel n, $a_n=a_0\times 2^n=1\times 2^n=2^n$.

(c) De la même manière on a $b_{n+1}=-b_n$ et $b_0=1$ d'où $b_n=(-1)^n$.

Et enfin $c_{n+1}=3c_n$ et $c_0=1$ d'où $c_n=3^n$.

4. En utilisant $A^n=MD^nN$ ainsi que $D^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}$, on en déduit que :

$$A^n=M\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}N=\begin{pmatrix}2^n&(-1)^n&0\\0&(-1)^n&3^n\\0&0&3^n\end{pmatrix}N=\begin{pmatrix}2^n&(-1)^n-2^n&2^n-(-1)^n\\0&(-1)^n&3^n-(-1)^n\\0&0&3^n\end{pmatrix}.$$