Cours

$u_n = u_1 + (n-1) \times raison = \boxed{5 + 3(n-1)} = 2 + 3n.$

Exercice 1 : Foire aux questions

Partie A - Première modélisation

1. v_0 correspond au nombre de questions, en centaines, posées le $(0+1)$-ième mois (donc le 1^{er}) d'existence du forum. 300 questions ont été posées ce 1^{er} mois, ce qui fait 3 centaines donc $v_0 = 3$.
   Du $(n-1)$-ième mois au n-ième, 90% des questions sont reposées, ce qui correspond à $0,9v_n$; ce à quoi il faut rajouter 130 nouvelles questions donc $1,3$ centaines, ainsi $v_{n+1} = 0,9v_n + 1,3$.
2. En remplaçant n par 0 dans la formule, on obtient $v_1 = 0,9v_0 + 1,3 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 4$. Cela veut dire que lors du second mois, 400 questions ont été posées.
   En remplaçant n par 1 dans la formule, on obtient $v_2 = 0,9v_1 + 1,3 = 0,9 \times 4 + 1,3 = 4,9$. Cela veut dire que lors du troisième mois, 490 questions ont été posées.
3.

n	1	2	3
v_n	3	4	4,9

$+1$ $+0,9$

On n'a pas la même addition à faire, ce n'est pas une suite arithmétique.

n	1	2	3
v_n	3	4	4,9

$\times\dfrac{4}{3}$ $\times\dfrac{4,9}{4}$

On n'a pas la même multiplication à faire, ce n'est pas une suite géométique.

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ n'est ni arithmétique ni géométrique}}$.

4. On définit la suite w par : pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = v_n - 13$.
   (a) $w_0 = v_0 - 13 = 3 - 13 = \boxed{-10}$.
   (b) Pour montrer que w est géométrique, on va montrer que $w_{n+1} = \text{constante} \times w_n$.
   $w_{n+1} = v_{n+1} - 13 = 0,9v_n + 1,3 - 13 = 0,9v_n - 0,9 \times 13 = 0,9(v_n - 13) = 0,9w_n$.
   Donc $\boxed{w \text{ est une suite géométrique de raison } 0,9}$.
   (c) On en déduit que $w_n = w_0 \times raison^n = \boxed{-10 \times 0,9^n}$.
   (d) Puisque $w_n = v_n - 13$, on en déduit que $v_n = w_n + 13 = 13 - 10 \times 0,9^n$.
5. On peut regarder à la calculatrice : $v_7 \approx 8,2 < 8,5$ et $v_8 \approx 8,7 > 8,5$ donc c'est à partir de $n = 8$.
   On peut aussi résoudre l'inéquation à l'aide du logarithme :

$$\begin{array}{rcll}
v_n & > & 8,5 & \\
 & & & \text{On remplace par la valeur} \\
13 - 10 \times 0,9^n & > & 8,5 & \\
 & & & -13 \\
-10 \times 0,9^n & > & -4,5 & \\
 & & & \div(-10) \\
0,9^n & < & 0,45 & \\
 & & & \text{On "passe au logarithme"} \\
log(0,9^n) & < & log(0,45) & \\
 & & & log(a^x) = x \times log(a) \\
n \times log(0,9) & < & log(0,45) & \\
 & & & \div log(0,9) \\
n & > & \dfrac{log(0,45)}{log(0,9)} &
\end{array}$$

Attention, dans la division $log(0,9)$ est un nombre négatif donc on change le sens de l'inégalité !

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\left]\dfrac{log(0,45)}{log(0,9)}; +\infty\right[}$.

Le premier entier plus grand que $\dfrac{log(0,45)}{log(0,9)}$ est 8. Ainsi la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$ est $\boxed{8}$.

6. On demande le nombre de questions différentes lorsqu'on arrive à la fin du 10e mois : ce n'est pas le nombre de questions du 10e mois ! Le premier mois il y en a 300, et ensuite 130 nouvelles chaque mois. Il faut donc calculer $300 + 9 \times 130 = \boxed{1\ 470}$.

Partie B - Une autre modélisation

1. (a) Le calcul donne $u_0 = 3$, $u_1 \approx 4,09$ et $u_2 \approx 4,98$.
   (b) Les valeurs trouvées sont donc proches de celles de la partie A.
2. On peut regarder à la calculatrice : $u_{12} \approx 8,46 < 8,5$ et $u_{13} \approx 8,55 > 8,5$ donc c'est à partir de $n = 13$.
   On peut aussi résoudre l'inéquation à l'aide du logarithme :

$$\begin{array}{rcll}
u_n & > & 8,5 & \\
9-6\times e^{-0,2n} & > & 8,5 & \text{On remplace par la valeur} \\
-6\times e^{-0,2n} & > & -0,5 & -9 \\
e^{-0,2n} & < & \dfrac{0,5}{6} & \div(-6) \\
log(e^{-0,2n}) & < & \dfrac{0,5}{6} & \text{On "passe au logarithme"} \\
-0,2n\times log(e) & < & log\left(\dfrac{0,5}{6}\right) & log(a^x) = x\times log(a) \\
n & > & \dfrac{log(\frac{0,5}{6})}{-0,2log(e)} & \div(-0,2log(e))
\end{array}$$

   L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\left]\dfrac{log(\frac{0,5}{6})}{-0,2log(e)};+\infty\right[}$.

   Le premier entier plus grand que $\dfrac{log(\frac{0,5}{6})}{-0,2log(e)}$ est 13. Ainsi la plus petite valeur de n telle que $u_n > 8,5$ est $\boxed{13}$.

Partie C - Application

1. Dans la partie A, on a vu que le nombre de questions posées dépasse 850 quand $n = 8$ c'est-à-dire au 9e mois. Dans la partie B, cela se passe au 14e mois. Ainsi, au plus tôt, cette embauche aura lieu $\boxed{\text{le 9e mois}}$.
2. En regardant à la calculatrice, la modélisation 1 semble donner plus de questions mensuelles que la modélisation 2. Effectivement la première modélisation semble se stabiliser à 1 300 questions alors que la seconde à 900.

Exercice 2 - Donné par les inspecteurs en 2009

1. Entre u_1 et u_3 il y a 2 pas de calcul à faire, donc on a ajouté deux fois la raison. Ainsi $48-12 = 2\times raison$ et donc la raison vaut 18 $\boxed{\text{réponse b}}$
   On pouvait aussi utiliser la formule $u_n = u_1 + (n-1)\times raison$, ici avec $n = 3$.
2. (u_n) est arithmétique, donc $u_n = u_0 + n\times raison$. Ainsi $u_n = 14\ 000 + n\times 100$.
   (v_n) est géométrique, donc $v_n = v_0 \times raison^n$ Ainsi $v_n = 6\ 500\times 1,1^n$.
   On sait que (v_n) est croissante (car $1,1 > 1$), et on a vu qu'alors elle finirait forcément par dépasser (u_n) car une suite géometrique croissante finit toujours par dépasser une suite arithmétique.
   On va donc regarder en 8, en 9 et en 131 et regarder où (v_n) est plus grande que (u_n).
   $u_8 = 14800 > 13933 \approx v_8$; $u_9 = 14900 < 15326 \approx v_9$. Ainsi c'est en 9 $\boxed{\text{réponse a}}$.
3. Le terme général s'écrit $u_n = 2n+5$. C'est donc de la forme $u_0 + n\times raison$ donc c'est une suite arithmétique de raison 2 $\boxed{\text{réponse c}}$.