

# 1 Cours

Soit  $u$  une suite géométrique de terme initial  $u_0 = -1$ . Quelles sont les limites possibles de la suite  $u$  (on détaillera les cas en fonction de la raison  $q$ ) ?

## 2 Exercice - Adapté de Nouvelle-Calédonie, 3 novembre 2013

Des étudiants en informatique étudient la propagation de virus sur le disque d'un ordinateur non connecté à un réseau.

### Partie A : un premier virus

À chaque allumage de l'ordinateur, le virus se répand et le nombre de fichiers infectés est déterminé par le terme général de la suite  $(U_n)$  définie par son premier terme  $U_1 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $U_{n+1} = 1 + 2U_n$  où  $n$  est le nombre d'allumages de l'ordinateur.

1. Calculer  $U_2, U_3$  et  $U_4$ .  
Justifier que la suite  $(U_n)$  n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On considère la suite  $(V_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par :  $V_n = U_n + 1$ .  
Calculer  $V_1, V_2, V_3$  et  $V_4$ .  
Quelle conjecture sur la nature de la suite  $(V_n)$  peut-on formuler ?
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $V_{n+1} = 2V_n$ .  
(b) En déduire une expression de  $V_n$  en fonction de  $n$ .
4. (a) En déduire que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $U_n = 2^n - 1$ .  
(b) Combien vaut  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  ?  
(c) À partir de combien d'allumages de l'ordinateur, le nombre de fichiers infectés sera-t-il supérieur à 1 000 ?

### Partie B : un deuxième virus

L'équipe d'étudiants implante maintenant un virus sur un autre ordinateur. Le nombre de fichiers infectés en fonction du nombre  $n$  d'allumages de l'ordinateur est  $3^n - 1$ .

Par ailleurs, chaque fois que le nombre de fichiers infectés est un multiple de 11, un message d'avertissement s'affiche à l'écran.

Le reste de la division euclidienne de  $3^n - 1$  par 11 est noté  $W_n$ .

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

$n$	$3^n - 1$	$W_n$
1		
2		
3		
4		
5		

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $X_n = W_{5n}$ .

2. Déduire  $X_1$  de la question précédente, puis calculer  $X_2$  et  $X_3$  en expliquant bien les étapes.
3. Que peut-on conjecturer sur la suite  $X$  ? Quelle information peut-on en déduire sur l'apparition du message d'avertissement ?