**Lycée Blaise Pascal** **Mardi 10 décembre 2013**

# BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR BLANC DE MATHÉMATIQUES – SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS –

**Durée de l'épreuve : 2 heures**

**Coefficient : 2**

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.*

*Le sujet est composé de 3 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

***Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4.***

**Exercice 1** **6 points**

**Partie A**

On donne les matrices suivantes ($\alpha$ et $\beta$ désignant des réels) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \text{-1} \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 & 1 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On admet que $BC = \begin{pmatrix} \ldots & 0 & 1 & 1 \\ \ldots & 1 & 0 & 1 \\ \ldots & 0 & 1 & 0 \\ \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Calculer les coefficients de la première colonne, en fonction de $\alpha$ et $\beta$.
2. Déterminer $\alpha$ et $\beta$ tels que B C = A.
3. Calculer $A^2$. Que remarque-t-on vis-à-vis de la matrice C ?

**Partie B**

1. Dessiner un graphe G orienté, de sommets $a$, $b$, $c$, $d$, dont la matrice adjacente est A.
2. (a) Dresser la liste de tous les chemins de longueur 2 allant de $a$ jusqu'à $c$.

   (b) Expliquer comment, en utilisant la partie A, on peut trouver sans en dresser la liste le nombre de chemins de longueur 2 allant jusqu'à $c$, et donner ce nombre.
3. Compléter le dessin de la question B. 1., en utilisant une couleur différente de manière à obtenir une représentation de la fermeture transitive du graphe G.

**Exercice 2** **5 points**

Sur un parking d'hôpital, les stationnements ne sont autorisés que dans les cas suivants :

- en semaine, hors des places réservées, pour le personnel ;
- en semaine, moins d'une heure, hors des places réservées, pour les visiteurs ;
- le dimanche, sur les places réservées, pour le personnel ;
- le dimanche, sans condition de durée, hors des places réservées.

1. On définit les variables booléennes $p$, $d$, $h$, $r$, et $a$, définies pour tout individu $x$ par les conditions :

   $p = 1$ si $x$ est un membre du personnel ;
   $d = 1$ si $x$ veut stationner un dimanche ;
   $h = 1$ si $x$ veut stationner moins d'une heure ;
   $r = 1$ si $x$ veut stationner sur une place réservée ;
   $a = 1$ si $x$ a l'autorisation de stationner.

   (a) Quels sont les individus pour lesquels $\overline{p}dh = 1$ ?

   (b) Par quel booléen peut-on remplacer la phrase « un membre du personnel désire stationner toute la journée sur une place réservée » ?

   (c) Écrire $a$ en fonction de $p$, $d$, $h$ et $r$, sous forme d'une somme de quatre termes.

2. Dans cette question, on s'intéresse seulement aux visiteurs.

   (a) Quelle valeur prend alors le booléen $p$ ? Montrer que, dans ce cas :

   $$a = d\overline{r} + \overline{d}h\overline{r}$$

   (b) À l'aide d'une table de Karnaugh, simplifier $a$ sous forme d'une somme de 2 termes chaque terme étant un produit de 2 facteurs.

   (c) Un visiteur désire passer deux heures avec sa femme hospitalisée un mercredi après-midi. Peut-il se garer sur le parking de l'hôpital ? Justifier la réponse.

3. Dans cette question, on s'intéresse seulement aux membres du personnel.

   (a) Montrer, par un calcul détaillé, que :

   $$a = d + \overline{r}$$

   (b) En déduire une expression de $\overline{a}$.

   (c) Donner le règlement s'appliquant aux membres du personnel sous forme d'une interdiction.

**Exercice 3** **9 points**

Des étudiants en informatique étudient la propagation de virus sur le disque d'un ordinateur non connecté à un réseau.

**Partie A : un premier virus**

À chaque allumage de l'ordinateur, le virus se répand et le nombre de fichiers infectés est déterminé par le terme général de la suite $(U_n)$ définie par son premier terme $U_1 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$ non nul : $U_{n+1} = 1 + 2U_n$ où $n$ est le nombre d'allumages de l'ordinateur.

1. Calculer $U_2, U_3$ et $U_4$.
   Justifier que la suite $(U_n)$ n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On considère la suite $(V_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $V_n = U_n + 1$.
   Calculer $V_1, V_2, V_3$ et $V_4$.
   Quelle conjecture sur la nature de la suite $(V_n)$ peut-on formuler ?
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $V_{n+1} = 2V_n$.
   (b) En déduire une expression de $V_n$ en fonction de $n$.
4. (a) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $U_n = 2^n - 1$.
   (b) À partir de combien d'allumages de l'ordinateur, le nombre de fichiers infectés sera-t-il supérieur à 1 000 ?

**Partie B : un deuxième virus**

L'équipe d'étudiants implante maintenant un virus sur un autre ordinateur. Le nombre de fichiers infectés en fonction du nombre $n$ d'allumages de l'ordinateur est $3^n - 1$.
Par ailleurs, chaque fois que le nombre de fichiers infectés est un multiple de 11, un message d'avertissement s'affiche à l'écran.
Le reste de la division euclidienne de $3^n - 1$ par 11 est noté $W_n$.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

| $n$ | $3^n - 1$ | $W_n$ |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |

2. Démontrer que si $n$ est un multiple de 5, alors $3^n - 1 \equiv 0 \pmod{11}$.
   Quelle information peut-on en déduire sur l'apparition du message d'avertissement ?