BTS Blanc - Décembre 2013 Correction

Exercice 1 **6 points**

Partie A

1. Le coefficient $(BC)_{i,j}$ est égal à la ligne i de B multipliée par la colonne j de C. On doit ici calculer la première colonne de BC, donc $(BC)_{1,1}$, $(BC)_{2,1}$, $(BC)_{3,1}$ et $(BC)_{4,1}$.

$$(BC)_{1,1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\\alpha\\\beta\end{pmatrix} = 0\times 2 + 0\times 0 + 1\times\alpha + (-1)\times\beta = \alpha - \beta$$

$$(BC)_{2,1} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\\alpha\\\beta\end{pmatrix} = (-1)\times 2 + 1\times 0 + 1\times\alpha + 0\times\beta = -2 + \alpha$$

$$(BC)_{3,1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\\alpha\\\beta\end{pmatrix} = 0\times 2 + 0\times 0 + 0\times\alpha + 1\times\beta = \beta$$

$$(BC)_{4,1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\\alpha\\\beta\end{pmatrix} = 1\times 2 + 0\times 0 + (-1)\times\alpha + 0\times\beta = 2 - \alpha$$

Ainsi la première colonne de BC vaut $\boxed{\begin{pmatrix}\alpha-\beta\\-2+\alpha\\\beta\\2-\alpha\end{pmatrix}}$

2. Pour que BC soit égal à A, il faut que tous les coefficients soient égaux. On voit que c'est déjà bien le cas pour les 3 dernières colonnes, il faut donc maintenant trouver α et β vérifiant $\begin{pmatrix}\alpha-\beta\\-2+\alpha\\\beta\\2-\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{rcl}\alpha-\beta & = & 1\\ -2+\alpha & = & 0\\ \beta & = & 1\\ 2-\alpha & = & 0\end{array}\right.$

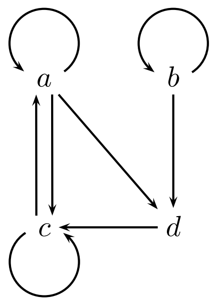
   La ligne 3 nous indique tout de suite que $\beta = 1$, et la ligne 4 que $\alpha = 2$. Il nous reste à vérifier que cela fonctionne bien dans les lignes 1 et 2 : $2-1$ est bien égal à 1 et $-2+2$ est bien égal à 0. Ainsi il faut choisir $\boxed{\beta = 1 \text{ et } \alpha = 2}$.

3. Le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&3&1\\0&1&1&1\\2&0&2&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$

   On remarque donc que A^2 est la matrice C dans laquelle on a remplacé α par 2 et β par 1.

Partie B

1. Voici une représentation du graphe orienté de matrice adjacente A :



2. (a) Pour aller de a jusqu'à c en suivant 2 arcs, on peut suivre les chemins :
   $\boxed{a \to a \to c\,;\; a \to d \to c \text{ ou } a \to c \to c.}$

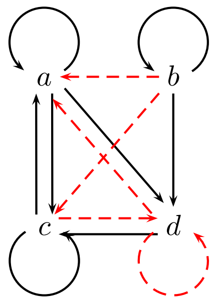
   (b) La matrice A^2 contient dans le coefficient $(A^2)_{i,j}$ le nombre de chemins de longueur 2 allant du i^{eme} sommet au j^{eme} sommet. c est le 3^{eme} sommet du graphe, donc il faut faire la somme de tous les coefficients $(A^2)_{i,3}$, c'est-à-dire la somme des coefficients de A^2 sur la 3^{eme} colonne.

   Cela donne donc un total de $\boxed{\text{7 chemins de longueur 2 allant jusqu'à } c}$.

3. Transformer le graphe G en sa fermeture transitive $\widehat{\mathrm{G}}$, c'est faire en sorte que dans $\widehat{\mathrm{G}}$, pour tous sommets i, j, k, si $i \to j$ et $j \to k$, alors on a aussi $i \to k$.

   On a vu que c'est équivalent à écrire que $\widehat{\mathrm{G}}$ est le graphe dont la matrice d'adjacence est la matrice d'accessibilité de G (c'est-à-dire que l'arc $i \to j$ sera dans $\widehat{\mathrm{G}}$ ssi il existe un chemin de i à j dans G).

   On peut donc soit compléter « à la main », soit calculer $\widehat{A} = A \oplus A^{[2]} \oplus A^{[3]} \oplus A^{[4]}$, et rajouter les arcs non déjà présents dans G. Dans tous les cas, on aboutit à :



Exercice 2 **5 points**

1. (a) $\overline{p}\; d\; h = 1$ si et seulement si <u>à la fois</u> $p = 0$, $d = 1$ et $h = 1$. Cela veut dire que ce sont les individus non membres du personnel, qui veulent stationner un dimanche moins d'une heure.

   (b) Cela veut dire que $p\; \overline{h}\; r = 1$.

   (c) L'autorisation a de stationner est écrite comme une disjonction de quatre cas, d'où la somme de quatre termes :
      - en semaine, hors des places réservées, pour le personnel : $\overline{d}\; \overline{r}\; p$
      - en semaine, moins d'une heure, hors des places réservées, pour les visiteurs : $\overline{d}\; h\; \overline{r}\; \overline{p}$
      - le dimanche, sur les places réservées, pour le personnel : $d\; r\; p$
      - le dimanche, sans condition de durée, hors des places réservées : $d\; \overline{r}$ (attention au piège : sans condition de durée implique donc que cela ne dépend pas de h !)

   Ainsi $\boxed{a = \overline{d}\; \overline{r}\; p + \overline{d}\; h\; \overline{r}\; \overline{p} + d\; r\; p + d\; \overline{r}}$.

2. (a) Pour un visiteur, $\boxed{p = 0}$. Dans ce cas :
   $a = \overline{d}\; \overline{r} \times 0 + \overline{d}\; h\; \overline{r} \times 1 + d\; r\; 0 + d\; \overline{r} = \overline{d}\; h\; \overline{r} + d\; \overline{r}.$ $\square$

   (b)

a		dr			
		00	01	11	10
h	0	0	0	0	1
	1	1	0	0	1

   On déduit donc que $\boxed{a = d\; \overline{r} + h\; \overline{r}}$.

   (c) Ce visiteur vérifie donc $\overline{h}\; \overline{d} = 1$. Dans le tableau de Karnaugh, les deux cases qui correspondent à cela sont toutes les 2 à 0, donc il ne pourra pas se garer pendant toute la durée de sa visite sur le parking de l'hopital.

En revanche rien n'interdit par exemple qu'il se gare la première heure de sa visite sur le parking, et qu'il quitte ensuite le parking avant de continuer sa visite avec sa femme (think outside the box !)

Donc il peut se garer sur le parking mais pas la totalité de sa visite.

3. (a) Ici on aboutit à $p = 1$, donc :

$$\begin{aligned} a &= \overline{d}\,\overline{r} \times 1 + \overline{d}\,h\,\overline{r} \times 0 + d\,r \times 1 + d\,\overline{r} \\ &= \overline{d}\,\overline{r} + d\,r + d\,\overline{r} \\ &= \overline{d}\,\overline{r} + d\,r + d\,\overline{r} \\ &= \overline{d}\,\overline{r} + d(r + \overline{r}) \\ &= \overline{d}\,\overline{r} + d \times 1 \\ &= \overline{d}\,\overline{r} + d \\ &= (\overline{d} + d) \times (\overline{r} + d) \\ &= 1 \times (\overline{r} + d) \\ &= \overline{r} + d \end{aligned}$$

(b) On en déduit $\overline{a} = \overline{\overline{r} + d} = \overline{\overline{r}}\,\overline{d} = \boxed{r\,\overline{d}}$.

(c) Pour les membres du personnel, la seule interdiction est donc de $\boxed{\text{se garer en semaine sur une place réservée}}$.

Exercice 3 **9 points**

Partie A : un premier virus

1. En utilisant la formule pour $n = 1$ il vient $U_2 = 1 + 2U_1 = 3$
En l'utilisant pour $n = 2$ il vient $U_3 = 1 + 2U_2 = 7$
En l'utilisant pour $n = 3$ il vient $U_4 = 1 + 2U_3 = 15$

n	1	2	3
u_n	1	3	7

$+2$ $\quad$ $+4$

On n'a pas la même addition à faire, ce n'est pas une suite arithmétique.

n	1	2	3
u_n	1	3	7

$\times 3$ $\quad$ $\times \dfrac{7}{3}$

On n'a pas la même multiplication à faire, ce n'est pas une suite géométique.
Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (U_n) \text{ n'est ni arithmétique ni géométrique}}$.

2. En utilisant la formule pour $n = 1, 2, 3$ et 4, on trouve :
$\boxed{V_1 = 2\,;\, V_2 = 4\,;\, V_3 = 8\,;\, V_4 = 16}$
On peut conjecturer que la suite (V_n) est géométrique de raison 2.

3. (a) $V_{n+1} = U_{n+1} + 1 = 1 + 2U_n + 1 = 2U_n + 2 = 2(U_n + 1) = 2V_n$.$\square$

(b) On peut en déduire que $V_n = V_1 \times \text{raison}^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = \boxed{2^n}$.

4. (a) Puisque $V_n = U_n + 1$, on en déduit que $U_n = V_n - 1 = 2^n - 1$.$\square$

(b) A l'aide de la calculatrice on voit que $U_9 = 511$ et $U_{10} = 1\,023$ donc c'est $\boxed{\text{à partir de 10 allumages}}$ de l'ordinateur que le nombre de fichiers infectés sera supérieur à 1 000.
On peut aussi résoudre $2^n - 1 \geq 1\,000 \Leftrightarrow 2^n \geq 1\,001 \Leftrightarrow log(2^n) \geq log(1\,001) \Leftrightarrow$
$nlog(2) \geq log(1\,001) \Leftrightarrow n \geq \dfrac{log(1\,001)}{log(2)} \approx 9,97$

Partie B : un deuxième virus

1.

n	$3^n - 1$	W_n
1	2	2
2	8	8
3	26	4
4	80	3
5	242	0

2. Si n est un multiple de 5, cela veut dire qu'il existe un entier k tel que $n = 5k$. On veut alors étudier la congruence modulo 11 de $3^{5k} - 1$.

   Pour cela on peut penser au fait que $3^{5k} = \left(3^5\right)^k$. Or on vient de voir que $3^5 - 1 \equiv 0 \quad [11]$, ce qui peut se réécrire $3^5 \equiv 1 \quad [11]$.

   Ainsi en élevant cette égalité à la puissance k, il vient que $\left(3^5\right)^k \equiv 1^k \quad [11]$, c'est-à-dire $3^{5k} \equiv 1 \quad [11]$, soit exactement $3^{5k} - 1 \equiv 0 \quad [11]$.$\square$

   On en déduit donc que le message d'avertissement apparait tous les 5 allumages de l'ordinateur, à partir du 5^{eme} allumage.