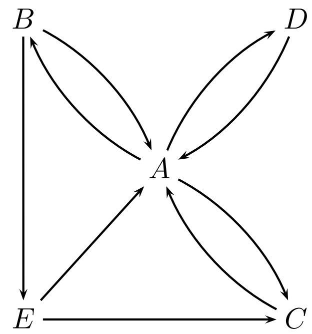
Exercice 1 - BTS Informatique & Gestion 2001, Nouvelle-Calédonie

1. Voici une représentation du graphe orienté associé au site :



2. En ordonnant les pages du site par ordre alphabétique, on retrouve bien le graphe précédent : la ligne 1 nous montre que le premier sommet (A) a pour successeurs les 2e, 3e et 4e sommets (B, C et D), etc.
3. Pour calculer la matrice booléenne $M^{[2]}$, on peut calculer la matrice M^2 puis remplacer les nombres non nuls par des 1 (à la calculatrice ou à la main avec la formule $(AB)_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}$)
   On peut également calculer directement dans l'algèbre de Boole, dans laquelle 1 correspond à Vrai, 0 à Faux, $+$ à $\vee$ et $\times$ à $\wedge$.
   De même pour $M^{[3]}$, et on trouve :
$$M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   Les « 1 » présents dans la matrice $M^{[3]}$ indiquent les sommets que l'on peut joindre par des chemins de longueur 3. Par exemple $(M^{[3]})_{1,2} = 1$ donc il existe un chemin de longueur 3 dans le graphe, reliant A à B.
4. (a) On lit que $(M^3)_{2,1} = 4$ donc il y a 4 chemins de longueur 3 ayant pour origine B et pour extrémité A. En regardant le dessin de la question 1, on voit que ces chemins sont les suivants :
   - B - A - B - A
   - B - A - D - A
   - B - A - C - A
   - B - E - C - A

   (b) Il y a bien trois circuits de longueur 3 :
   - un de A vers A car $(M^3)_{1,1} = 1$: A - B - E - A
   - un de B vers B car $(M^3)_{2,2} = 1$: B - E - A - B
   - un de E vers E car $(M^3)_{5,5} = 1$: E - A - B - E

Exercice 2 - Calculs

1. Pour écrire la décomposition en produit de facteurs premiers, il suffit de trouver un nombre premier qui divise le nombre, et de recommencer sur le quotient jusqu'à avoir 1.
   437 n'est pas divisible par 2 ni par 3 ni par 5...mais est divisible par 19 : $437 = 19 \times 23$.
   23 est également premier, donc c'est terminé : $\boxed{437 = 19 \times 23}$

   32 200 est divisible par 2 : $32\,200 = 2 \times 16\,100$.
   16 100 également : $16\,100 = 2 \times 8\,050$
   8 050 également : $8\,050 = 2 \times 4025$.
   4 025 n'est pas divisible par 3, mais est divisible par 5 : $4\,025 = 5 \times 805$
   805 est divisible par 5 : $805 = 5 \times 161$.
   161 est divisible par 7 : $161 = 7 \times 23$, et 23 est premier.

Ainsi $32\ 200 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 23 = \boxed{2^3 \times 5^2 \times 7 \times 23}$

67 375 n'est pas divisible par 2 ni par 3, mais par 5 : $67\ 375 = 5 \times 13\ 475$.
13 475 également : $13\ 475 = 5 \times 2\ 695$
2 695 également : $2\ 695 = 5 \times 539$
539 est divisible par 7 : $539 = 7 \times 77$
77 est divisible par 7 : $77 = 7 \times 11$, et 11 est premier.
Ainsi $67\ 375 = 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 = \boxed{5^3 \times 7^2 \times 11}$

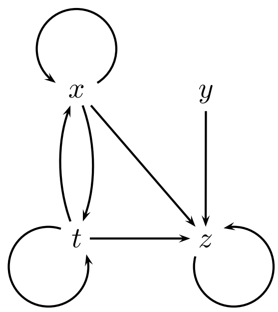
2. On va diviser 450 par tous les nombres de 1 à $\sqrt{450} \approx 21$ et regarder quand cela tombe juste pour avoir les diviseurs positifs, puis on rajoutera les opposés pour avoir tous les diviseurs.
$450 = 1 \times 450$; $450 = 2 \times 225$; $450 = 3 \times 150$; $450 = 5 \times 90$; $450 = 6 \times 75$; $450 = 9 \times 50$; $450 = 10 \times 45$; $450 = 15 \times 30$; $450 = 18 \times 25$.
Ainsi $D(450) = \{1 ; 450 ; 2 ; 225 ; 3 ; 150 ; 5 ; 90 ; 6 ; 75 ; 9 ; 50 ; 10 ; 45 ; 15 ; 30 ; 18 ; 25 ; -1 ; -450 ; -2 ; -225 ; -3 ; -150 ; -5 ; -90 ; -6 ; -75 ; -9 ; -50 ; -10 ; -45 ; -15 ; -30 ; -18 ; -25\}$

Exercice 3 - Congruences

1. Si on appelle x le nombre de jetons de Zoé, l'énoncé se réécrit en $\boxed{x \equiv 9[17] \text{ et } x \equiv 3[5]}$.
2. $300 = 17 \times 17 + 11$, donc $300 \equiv 11[17]$. Ainsi pour obtenir un nombre congru à 9 modulo 17, on peut rajouter 15 (car $15 \equiv -2[17]$ donc un nombre congru à 11 plus un nombre congru à -2 donne bien un nombre congru à 9 modulo 17).
Effectivement $315 = 18 \times 17 + 9$. Pour trouver les autres nombres de jetons x possibles pour que $x \equiv 9[17]$, il suffit ensuite de rajouter autant de fois 17 que l'on veut (et puisqu'on veut rester entre 300 et 400, on s'arrêtera à 400).
Ainsi les possibilités pour être congru à 9 modulo 17 sont $\boxed{315 \ ; \ 332 \ ; \ 349 \ ; \ 366 \ ; \ 383 \ ; \ 400}$.
Il faut aussi trouver parmi ces nombres, ceux qui sont congrus à 3 modulo 5 !
$315 = 63 \times 5 + 0$ donc $315 \equiv 0[5]$
$332 = 66 \times 5 + 2$ donc $332 \equiv 2[5]$
$349 = 69 \times 5 + 4$ donc $349 \equiv 4[5]$
$366 = 73 \times 5 + 1$ donc $366 \equiv 1[5]$
$383 = 76 \times 5 + 3$ donc $383 \equiv 3[5]$
$400 = 80 \times 5 + 0$ donc $400 \equiv 0[5]$.
Au final, la seule possibilité est que Zoé possède $\boxed{383 \text{ jetons}}$.

Exercice 4 - BTS Informatique & Gestion 2007, Métropole

A partir de la matrice d'adjacence, on peut construire le graphe suivant :



1. A : Faux (x possède exactement trois successeurs)
B : Faux (l'arc $z - x$ n'existe pas)
C : Vrai
D : Faux (l'arc $z - t$ n'existe pas)
2.

$$\text{Un calcul donne } M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

On voit alors que c'est la réponse C car le nombre de cheins de longueur 3 de x à z c'est $(M^3)_{1,3} = 7$.