Exercice 1 - Tiré de BTS Polynésie, mai 2013

1. (a) Pour connaître les prédécesseurs du sommet POST, il suffit de lire les tâches antérieures : ce sont les sommets $\boxed{\text{INST et ECR}}$.

   (b) Pour connaître les successeurs du sommet COM, il suffit de lire les tâches qui ont COM dans leurs tâches antérieures : ce sont les sommets $\boxed{\text{LOG, MAT et ECR}}$.

2. Pour déterminer le niveau de chacun des sommets du graphe, on peut utiliser l'algorithme du cours :

Calcul de niveaux.

```
Entrée :
Un graphe G = (V; E).

Sortie et rôle de l'algorithme :
Étiqueter chaque sommet de V par son niveau.

Variables utilisées :
A_traiter, ensemble de sommets
niveau, nombre entier

Corps de l'algorithme :
A_traiter ← ∅
niveau ← 0
Pour chaque sommet v de V, faire
        Si v est sans prédécesseur, alors
                A_traiter ← A_traiter ∪ {v}
        Fin Si
Fin Pour
Tant que A_traiter ≠ ∅, faire
        Pour chaque sommet v de A_traiter, faire
                Étiqueter v par niveau
                Pour chaque successeur s de v, faire
                        Retirer l'arête (v; s) de G
                Fin Pour
        Fin Pour
        Pour chaque sommet v de V, faire
                Si v est sans prédécesseur, alors
                        A_traiter ← A_traiter ∪ {v}
                Fin Si
        Fin Pour
        niveau ← niveau + 1
Fin Tant que
```

Étape 1 :

- seul COM est sans prédécesseurs (c'est le seul sommet qui n'a personne dans la colonne des antécédents)
- on attribue donc à ce sommet le niveau 0
- on retire les arcs émanant de COM, c'est-à-dire les trois arcs $(COM; ECR)$, $(COM; LOG)$ et $(COM; MAT)$ (on raye donc COM à chaque fois qu'il apparaît quelque part dans la colonne des antécédents)

Étape 2 :

- maintenant ECR, LOG et MAT se retrouvent sans prédécesseurs
- on attribue donc à ces sommets le niveau 1
- on retire les arcs émanant de ces sommets, c'est-à-dire les quatre arcs $(ECR; POST)$, $(LOG; ASS)$, $(MAT; ASS)$ et $(MAT; CABL)$ (on raye donc ECR, LOG et MAT à chaque fois qu'ils apparaissent quelque part dans la colonne des antécédents)

Étape 3 :

- maintenant ASS et $CABL$ se retrouvent sans prédécesseurs
- on attribue donc à ces sommets le niveau 2

- on retire les arcs émanant de ces sommets, c'est-à-dire les deux arcs $(ASS; INST)$ et $(CABL; CONF)$ (on raye donc $CABL$ et $CONF$ à chaque fois qu'ils apparaissent quelque part dans la colonne des antécédents)

Étape 4 :

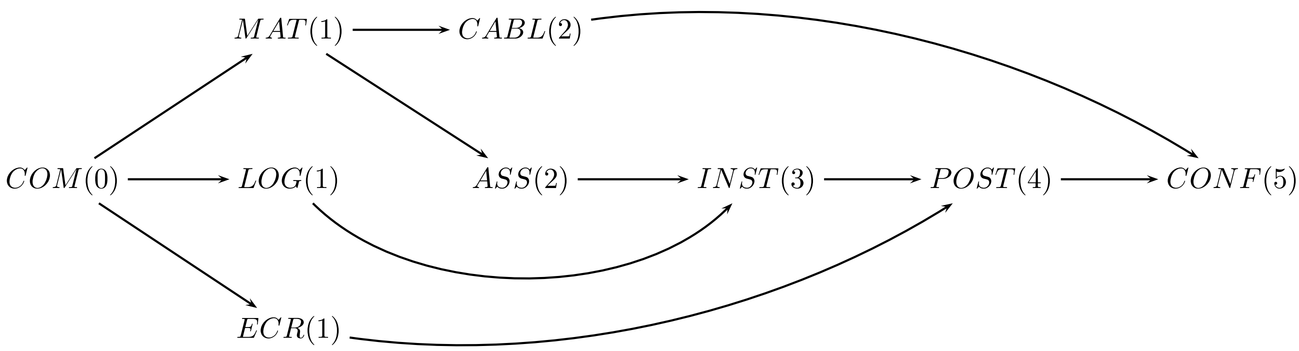
- maintenant $INST$ se retrouve sans prédécesseurs
- on attribue donc à ce sommet le niveau 3
- on retire les arcs émanant de ce sommet, c'est-à-dire l'arc $(INST; POST)$ (on raye donc $INST$ à chaque fois qu'il apparaît quelque part dans la colonne des antécédents)

Étape 5 :

- maintenant $POST$ se retrouve sans prédécesseurs
- on attribue donc à ce sommet le niveau 4
- on retire les arcs émanant de ce sommet, c'est-à-dire l'arc $(POST; CONF)$ (on raye donc $POST$ à chaque fois qu'il apparaît quelque part dans la colonne des antécédents)

Étape 6 :

- maintenant $CONF$ se retrouve sans prédécesseurs
- on attribue donc à ce sommet le niveau 5
- et c'est terminé !



3. On utilise la méthode MPM :

   Étape 1 :

   - on rajoute une tâche fictive Début, antécédent direct des tâches qui n'ont pas de prédécesseur (ici, seulement COM) et de durée 0.
   - on rajoute une tâche fictive Fin, successeur direct des tâches qui n'ont pas de successeur (ici, seulement CONF)
   - on value les arcs par la durée de la tâche dont ils sont issus

   Étape 2 :

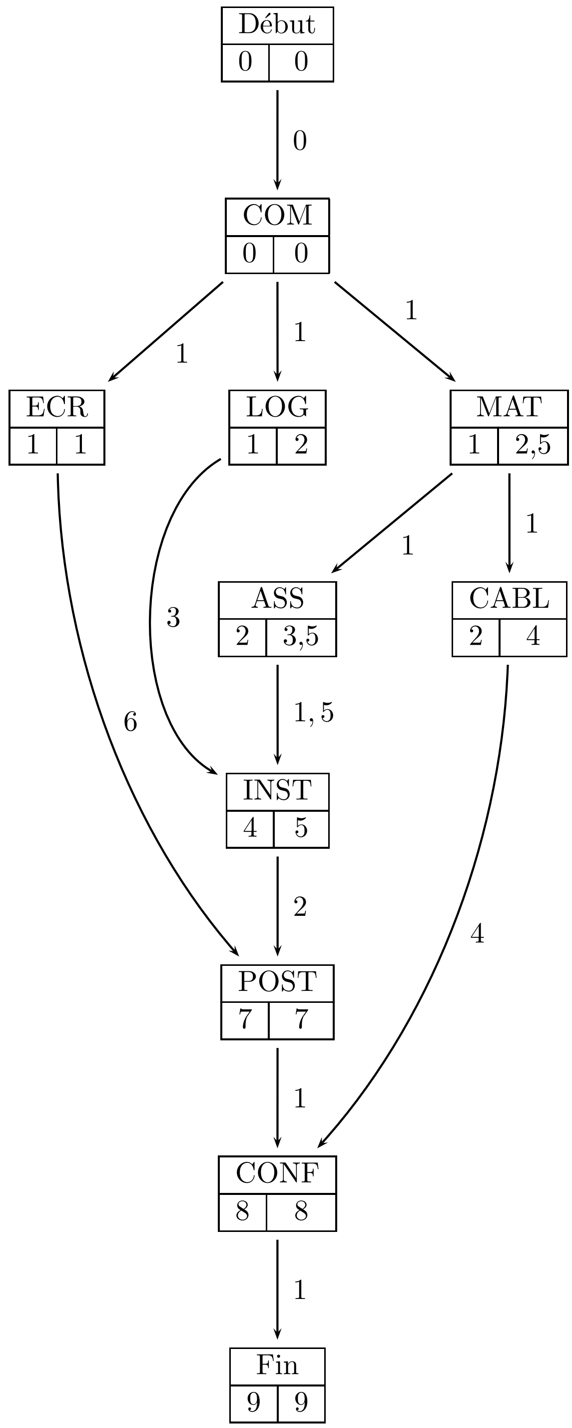
   - on met comme date de début au plus tôt pour Début 0.
   - on calcule les plus longs chemins du sommet Début à chacun des sommets, pour en déduire leur date de début au plus tôt (algorithme de Bellman, puisque Dijkstra ne fonctionne pas : plus long chemin et poids positifs)

   Étape 3 :

   - on met comme date de début au plus tard pour Fin la même chose que sa date de début au plus tôt.
   - on « inverse » les arcs (on change le sens des flèches, on prend l'opposé des poids des arcs) et on calcule les dates au plus tard en calculant les plus courts chemins sur le nouveau graphe (Bellman encore une fois puisque Dijkstra ne fonctionne pas non plus : plus court chemin et poids négatifs)

   Le graphe qu'on obtient à la fin est le suivant, où chaque sommet est représenté de la manière suivante :

Nom du sommet	
Date au plus tôt	Date au plus tard



4. Le chemin critique est celui qui est constitué des tâches critiques (celles dont la marge totale est nulle, donc pour lesquelles début au plus tard = début au plus tôt). Le chemin critique est donc $\boxed{\text{(Début, COM, ECR, POST, CONF, Fin)}}$.

   La durée de réalisation du projet est la date du sommet Fin, c'est-à-dire $\boxed{\text{9 jours}}$.

5. (a) La marge totale de la tâche ASS est de $\boxed{\text{1,5 jour}}$ (date au plus tard - date au plus tôt). Elle correspond à la durée de laquelle peut être retardée la tâche ASS sans retarder la fin du projet.

   (b) La marge libre de la tâche ASS est de $\boxed{\text{0,5 jour}}$ (minimum sur les successeurs s de ASS de date au plus tôt(s) - durée de ASS - date au plus tôt de ASS). Elle correspond à la durée de laquelle peut être retardée la tâche ASS sans retarder la date au plus tôt de chacune des tâches suivant ASS.

Exercice 2

1. $\boxed{\text{Vrai}}$: le chemin $(a, c, b, d, e, f, i, j, h, g)$ est effectivement chemin hamiltonien. On vérifie que c'est bien un chemin du graphe en vérifiant que chacun des arcs est bien présent, puis on vérifie qu'il passe bien une et une seule fois par chacun des sommets.
2. $\boxed{\text{Faux}}$: il y a un circuit dans ce graphe (par ex. (b, d, e, c, b)) donc on ne peut pas l'ordonner par niveaux.
3. $\boxed{\text{Vrai}}$: dans un parcours en largeur débutant en d, le sommet a n'est jamais atteint (il n'a aucun prédécesseur)
4. $\boxed{\text{Vrai}}$: les chemins (f, i, g) et (f, i, j, h, g). Si vraiment on a peur de se tromper en regardant le graphe : appelons M la matrice d'adjacence ; on peut calculer $(M^2)_{6,8}$, $(M^3)_{6,8} \dots (M^{20})_{6,8}$ pour s'en assurer. Le fait que tous les coefficients de la puissance 11 à la puissance 20 soient nuls nous assure qu'il n'existe aucun circuit entre f et g (s'il y en avait un, il y en aurait un de longueur inférieure ou égale à 10, ce qui impliquerait l'existence d'au moins un chemin de longueur entre 11 et 20 entre f et g).
5. $\boxed{\text{Faux}}$: dans la clôture transitive de G, on met un arc entre s et t si et seulement s'il y a un chemin dans G de s à t : il n'y a clairement aucun chemin de g à h puisque g n'a aucun successeur !