Dans l'algorithme suivant, on suppose que l'on saisit $a < b$ et que f est une fonction continue, positive et croissante sur l'intervalle $[a;b]$.

Algorithme de Riemann.

Variables :
a, b, S et *longueur* sont quatre nombres réels.
N et i sont deux nombres entiers naturels.
f est une fonction préalablement définie.

Corps de l'algorithme :
1 **Lire la valeur de** a
2 **Lire la valeur de** b
3 **Lire la valeur de** N
4 *longueur* **prend la valeur** $\dfrac{b-a}{N}$
5 S **prend la valeur** 0
6 **Pour** i variant de 1 jusqu'à N
7 $\quad$ S **prend la valeur** $S + f(a + i \times longueur) \times longueur$
8 **Fin_Bloc_Pour**
9 **Afficher le message** "S vaut "
10 **Afficher la variable** S

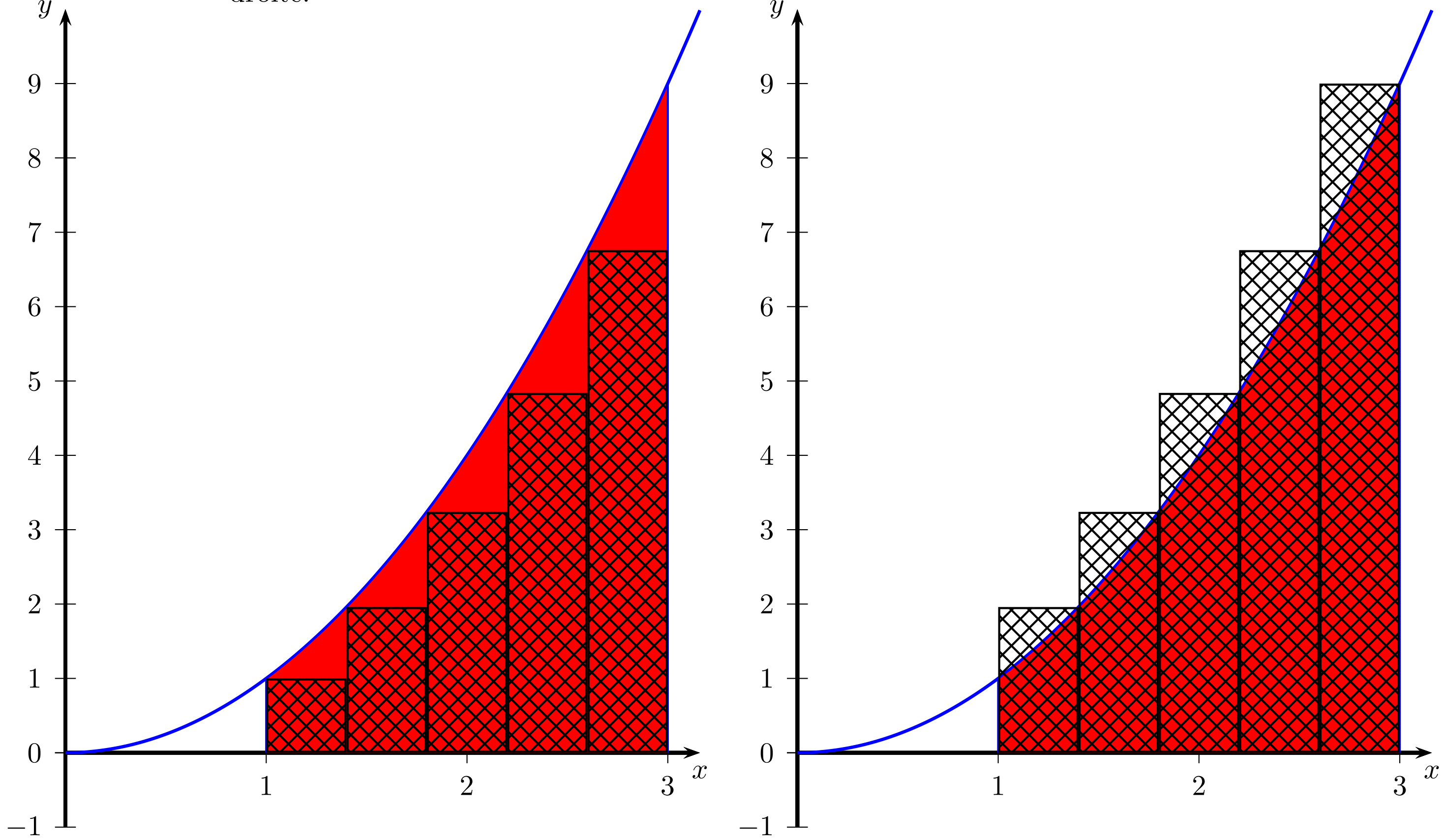
Dans cette activité, on choisit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, et on saisit $a = 1$ et $b = 3$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la valeur affichée par l'algorithme lorsque l'on saisit $N = n$.

1. On saisit $N = 5$; l'algorithme va donc calculer u_5.
   (a) Compléter le tableau de suivi de variables suivant, jusqu'à la fin de l'algorithme :

	a	b	N	*longueur*	S	i
Ligne 1	1	-	-	-	-	-
Ligne 2		3	-	-	-	-
Ligne 3			5	-	-	-

   (b) Qu'affiche l'algorithme ?

(c) On présente ci-dessous deux approximations de $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^3 t^2 dt$ (en grisé sur chaque graphique). On pose A_g l'aire de l'union des rectangles hachurés de gauche et A_d celle de droite.



L'algorithme a-t-il calculé A_g ou A_d ?

(d) Comment peut-on modifier l'algorithme pour qu'il affiche l'autre aire hachurée ?

2. On revient au cas général où l'utilisateur saisit une valeur $N = n$ entier naturel non nul quelconque.

Par des considérations d'aires, puisque f est croissante, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \mathcal{A} \leq u_n$.

(a) En suivant l'algorithme, on voit de plus que
$u_n = \dfrac{2}{n} f\left(1 + 1 \times \dfrac{2}{n}\right) + \dfrac{2}{n} f\left(1 + 2 \times \dfrac{2}{n}\right) + \dfrac{2}{n} f\left(1 + 3 \times \dfrac{2}{n}\right) + \cdots + \dfrac{2}{n} f\left(1 + n \times \dfrac{2}{n}\right)$.
En déduire une expression de u_n en fonction de n à l'aide du symbole $\sum$, et exprimer de même v_n en fonction de n à l'aide du symbole $\sum$.

(b) En déduire une expression simplifiée de $u_n - v_n$ en fonction de n, puis démontrer que $\underset{n\to+\infty}{lim} u_n - v_n = 0$.

(c) En utilisant le théorème des gendarmes, en déduire que $\underset{n\to+\infty}{lim} v_n = \mathcal{A}$.
Que peut-on dire de $\underset{n\to+\infty}{lim} u_n$?

(d) Proposer alors un algorithme pour avoir un encadrement à 10^{-3} près de $\mathcal{A}$.