Des couples parfaits

Le couple d'entiers $(25\,;\,36)$ possède deux propriéts remarquables :

- Ce sont des carrés parfaits.
- Le deuxième nombre s'écrit avec les chiffres du premier augmentés de 1, dans le même ordre.

Bernard et Cécile cherchent d'autres couples vérifiant ces deux propriétés.

1 Partie 1

Dans un premier temps, ils se limitent aux entiers inférieurs à 100 pour tester leur méthode.

1. Existe-t-il des couples d'entiers à deux chiffres (compris entre 10 et 99) vérifiant ces deux propriétés ?
2. Pour vérifier leurs résultats, Bernard et Cécile proposent les algorithmes suivants :

Algorithme de Bernard.

Variable :
i est un nombre entier.

Corps de l'algorithme :
Pour i de 10 à 88, faire
    Si $\sqrt{i}$ est un entier et $\sqrt{i+11}$ est un entier, alors
        Afficher i et $i+11$
    Fin Si
Fin Pour

Algorithme de Cécile.

Variable :
i est un nombre entier.

Corps de l'algorithme :
Pour i de 4 à 9, faire
    Si $\sqrt{i^2+11}$ est un entier, alors
        Afficher i^2 et i^2+11
    Fin Si
Fin Pour

Pour chaque algorithme, on appellera temps de l'algorithme le nombre de fois que le programme correspondant rencontrera une condition (Si) ; par exemple, le temps de l'algorithme de Bernard est 79.

(a) Pour chaque algorithme proposé, expliquer ce que représentent les valeurs de la variable i lors des affichages.

(b) Quel est le temps de l'algorithme de Cécile ?

2 Partie 2

Bernard et Cécile cherchent maintenant les couples d'entiers naturels à quatre chiffres (compris entre 1000 et 9999) vérifiant les deux propriétés.

1. Comment chacun peut-il transformer son algorithme pour résoudre le problème ? Quel sera alors le temps de chaque algorithme ?
2. Programmer l'algorithme modifié de Bernard ou de Cécile avec Algobox ou une calculatrice. Quelle est la réponse au problème posé ?

Arrondis

Rappel :
Soit x un nombre réel. Notons E la fonction partie entière. On rappelle que :
- Si $x < E(x) + 0,5$, alors l'arrondi à l'unité de x vaut $E(x)$
- Sinon, l'arrondi à l'unité de x vaut $E(x) + 1$.

Notation :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\{n\}$ le nombre d'entiers p tels que l'arrondi à l'unité de $\sqrt{p}$ soit égal à n.

Exemples :

<table>
<tr><td>p</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr>
<tr><td>Arrondi à l'unité de $\sqrt{p}$</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$\{n\}$</td><td colspan="2">$\{1\} = 2$</td><td colspan="4">$\{2\} = 4$</td><td colspan="6">$\{3\} = 6$</td><td></td></tr>
</table>

1. Calculer $\{4\}$.
2. Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur la valeur de n puis qui affiche le nombre $\{n\}$. On utilisera les fonctions suivantes :
   - round : prend en entrée un nombre et renvoie son arrondi à l'unité
   - sqrt : prend en entrée un nombre et renvoie sa racine carrée
3. Programmer cet algorithme avec Algobox ou une calculatrice. Que peut-on conjecturer sur la valeur de $\{n\}$ en fonction de n ?