I/ Suites.

1. | Soient deux suites u et w telles que :
• u est inférieure à w à partir d'un certain rang
• u diverge vers $+\infty$
Alors w diverge également vers $+\infty$. |
|---|

<u>Preuve :</u> *Une suite diverge vers $+\infty$ quand à partir d'un certain rang, tous ses termes peuvent être rendus aussi grands que voulu.*

Soit $A > 0$ (*sous-entendu, aussi grand que voulu*). Puisque u diverge vers $+\infty$, alors à partir d'un certain rang p (*qui dépend de* A), tous les termes de u sont plus grands que A.

Puisque u est inférieure à w à partir d'un certain rang, il existe donc un rang q à partir duquel chaque terme de u est inférieur au terme de w de même rang.

Donc, une fois qu'on a dépassé à la fois le rang p et le rang q (c'est-à-dire : à partir du rang $r = max(p, q)$), tous les termes de w sont plus grands que A (puisque si on choisit un rang $n \geq r$, on a à la fois $u_n \geq A$ (car $n \geq p$) et $w_n \geq u_n$ (car $n \geq q$) donc $w_n \geq A$).

Nous venons bien de démontrer que w diverge également vers $+\infty$ (*puisque ce raisonnement est valable pour tout* $A > 0$).$\square$

2. | Soit $q > 1$. Alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. |
|---|

<u>Preuve :</u> Soient $a > 0$ et P_n la propriété « $(1+a)^n \geq 1+na$ ». Démontrons que cette propriété est vraie sur $\mathbb{N}$ par récurrence sur n :

- Initialisation : $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$, donc on a bien $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \times a$.
- Hérédité : supposons que $(1+a)^n \geq 1+na$. Alors :

$$\begin{aligned}
(1+a)^n+1 &= (1+a)\times(1+a)^n \\
&\geq (1+a)\times(1+na) && \text{On utilise l'hypothèse de récurrence} \\
&\geq 1+na+a+na^2 && \text{On développe} \\
&\geq 1+(n+1)a+na^2 && \text{On fait apparaître le } (n+1)a \text{ de } P_{n+1} \\
&\geq 1+(n+1)a && na^2 \geq 0
\end{aligned}$$

  On vient bien de démontrer P_{n+1}.
- Conclusion : On a bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$.

Maintenant puisque $q > 1$ alors $q = 1+(q-1)$ avec $(q-1) > 0$. On peut donc utiliser la propriété P_n avec $a = q-1$: $\forall n \in \mathbb{N}, q^n \geq 1+n(q-1)$. Or la suite de droite est une suite arithmétique de raison $q-1 > 0$ donc diverge vers $+\infty$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, minorée par une suite divergeant vers $+\infty$, admet donc la même limite.$\square$

II/ La fonction exponentielle

3. | S'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$, alors il y a unicité d'une telle fonction. |
|---|

<u>Idée de la preuve :</u> *On va montrer que si f et g sont deux fonctions vérifiant les contraintes, alors nécessairement $f = g$ en montrant que $\dfrac{f}{g} = 1$. Pour cela, il faut tout d'abord montrer qu'une fonction vérifiant les contraintes ne s'annule jamais (pour justifier la division par g).*

<u>Preuve :</u> **Etape 1 :** Soit f une fonction vérifiant les contraintes. Définissons $h : x \mapsto f(x)f(-x)$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque $x \mapsto f(-x)$ est dérivable comme composée de f dérivable et d'une fonction affine, et le produit de deux fonctions dérivables est dérivables), et :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) &= f'(x)\times f(-x) + f(x)\times(-f'(-x)) \\
&= f(x)\times f(-x) - f(x)\times f(-x) && \text{Puisque } f' = f \\
&= 0 && \text{On simplifie}
\end{aligned}$$

Ainsi h est une fonction constante. Or on connaît $h(0) = f(0) \times f(-0) = 1 \times 1 = 1$. Ce qui veut dire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = 1$. Il est donc impossible que f s'annule (si elle s'annulait en x_0 on aurait $f(x_0)f(-x_0) = 0$ ce qui est en contradiction avec ce qu'on vient de démontrer.

Etape 2 : Soient f et g deux fonctions vérifiant les contraintes. Définissons la fonction $i : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

i est dérivable sur $\mathbb{R}$ (f et g le sont et g ne s'annule pas), et :

$\forall x \in \mathbb{R},\ i'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \dfrac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{(g(x))^2} = 0$

Ainsi i est une fonction constante. Or on connaît $i(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$. Ce qui veut dire que $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On a bien démontré que $f = g$ ainsi, si elle existe, uen fonction qui vérifie ces contraintes est unique.$\square$

4. $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty.}$

<u>Preuve :</u> Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x$.

Pour cela considérons la fonction $f : x \mapsto e^x - x$ et étudions son signe. Pour ce faire, dérivons, étudions les variations :

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 1$. Or exp est strictement croissante et $e^0 = 1$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Var. f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Ainsi f admet un minimum en 0 qui vaut 1, donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$. On a bien démontré que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x$.

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.$\square$

III/ Géométrie dans l'espace

5. Si $\mathcal{P}$ est un plan, alors $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ non tous nuls et $d \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{P} = \{M(x;y;z) | ax + by + cz + d = 0\}$.
Réciproquement, si (a,b,c) sont trois réels non tous nuls et si d est un réel, alors l'ensemble $\mathcal{P} = \{M(x;y;z) | ax + by + cz + d = 0\}$ est un plan de l'espace.

<u>Preuve :</u> **Sens direct :** soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point du plan $\mathcal{P}$, et $\overrightarrow{n} = (a;b;c)$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire orthogonal à $\mathcal{P}$ et non nul donc a, b et c sont non tous nuls).

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. $M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff$

$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \iff ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A) = 0$.

On a bien montré qu'il existe trois réels (a,b,c) non tous nuls et un réel $d = -ax_A - by_A - cz_A$ tels que $\mathcal{P} = \{M(x;y;z) | ax + by + cz + d = 0\}$.$\square$

Sens réciproque : sans perte de généralité, on peut supposer que a est non nul (sinon c'est b ou c, et au lieu de diviser par a on diviserait par b ou c). Ainsi le point $A = \begin{pmatrix} \frac{-d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point de $\mathcal{P}$: effectivement

$a \times \dfrac{-d}{a} + b \times 0 + c \times 0 + d = -d + d = 0$. Soient $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{n}$ le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Alors $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} x + \frac{d}{a} \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\left(x + \dfrac{d}{a}\right) + by + cz = ax + by + cz + d = 0$ par définition de $\mathcal{P}$.

Donc l'ensemble $\mathcal{P}$ est un plan (c'est le plan perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ passant par A).$\square$

6. | Soient $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan. Alors $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\mathcal{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.

Preuve :

Sens direct : Soit $\mathcal{D}$ une droite perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$. Alors par définition, $\mathcal{D}$ est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$. Donc si on choisit deux droites sécantes de $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$ est bien orthogonale à chacune de ces deux droites.$\square$

Sens réciproque : Soient $\mathcal{P}$ un plan, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites sécantes de ce plan, et $\mathcal{D}$ une droite perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Soient $\overrightarrow{n}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$:

- Puisque $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$. Ainsi tout vecteur de $\mathcal{P}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
- Puisque $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}_1$, $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0$
- Puisque $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}_2$, $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Soit Δ une droite de $\mathcal{P}$. Son vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ est donc un vecteur de $\mathcal{P}$ donc est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$: $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

Alors $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{n} \cdot (a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} + b\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = a \times 0 + b \times 0 = 0$. Donc $\mathcal{D} \perp \Delta$. Ainsi $\mathcal{D}$ est bien orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$.$\square$

IV/ Probabilités

7. | Soient A et B deux événements. Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont également.

Preuve :

Soient A et B deux événements indépendants. Cela veut dire que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (*).

A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, c'est-à-dire que $A \bigsqcup \overline{A} = \Omega$, ainsi $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ forment une partition de B, c'est-à-dire que $(A \cap B) \bigsqcup (\overline{A} \cap B) = B$. D'où $P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(B)$ (**).

En combinant les égalités (*) et (**), on obtient que :

$P(A) \times P(B) + P(\overline{A} \cap B) = P(B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) \times (1 - P(A))$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) \times P(\overline{A})$

Ce qui veut exactement dire que $\overline{A}$ et B sont indépendants.$\square$

8. | Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Alors l'espérance de X vaut $\dfrac{1}{\lambda}$.

Preuve :

Soient $\lambda > 0$, X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ et $a > 0$. Calculons $\displaystyle\int_0^a t \times \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t$. Appelons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Démontrons que la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par $F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une primitive de f.

$$\begin{cases} u(t) &= -t - \dfrac{1}{\lambda} \\ v(t) &= \mathrm{e}^{-\lambda t} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(t) &= -1 \\ v'(t) &= -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \end{cases}$$

Ainsi, $\forall t \geq 0, F'(t) = -1 \times \mathrm{e}^{-\lambda t} + \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right) \times (-\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}) = -\mathrm{e}^{-\lambda t} + t\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t} = f(t)$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^a t \times \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \left[\left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^a = \left(-a - \frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda a} - \left(-0 - \frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda 0} = \left(-a - \frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda}$.

Or l'exponentielle l'emporte sur les puissances ainsi $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \left(-a - \frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda a} = 0$, d'où

$\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \int_0^a t \times \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$ ce qui veut exactement dire que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.$\square$

9. > Soient $\alpha \in]0;1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Alors $\exists! u_\alpha > 0$ tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Preuve :

Soient $\alpha \in]0;1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Appelons Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = P(X \leq x)$. On doit résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation :

$$\begin{aligned} P(-x \leq X \leq x) &= 1-\alpha & \\ \Phi(x) - \Phi(-x) &= 1-\alpha & \text{Par définition de } \Phi \\ \Phi(x) - (1-\Phi(x)) &= 1-\alpha & \Phi(-x) = 1-\Phi(x) \\ 2\Phi(x) - 1 &= 1-\alpha & \text{On simplifie} \\ 2\Phi(x) &= 2-\alpha & +1 \\ \Phi(x) &= 1-\frac{\alpha}{2} & \div 2 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{array}{ccccc|l} 0 & < & \alpha & < & 1 & \\ 0 & < & \frac{\alpha}{2} & < & \frac{1}{2} & \div 2 \\ 0 & > & -\frac{\alpha}{2} & > & -\frac{1}{2} & \times(-1) \\ 1 & > & 1-\frac{\alpha}{2} & > & \frac{1}{2} & +1 \end{array}$$

On cherche donc à montrer que dans $]0;+\infty[$ l'équation $\Phi(x) = k$ avec $k \in]0,5;1[$ a une unique solution. La fonction Φ, sur $]0;+\infty[$ est continue, strictement croissante (car c'est une fonction d'aire), avec $\Phi(0) = 0,5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$. Donc par application du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas strictement monotone, on a bien l'existence d'une unique solution de cette équation.$\square$

10. > Soient $p \in [0;1]$, $\alpha \in]0;1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Appelons I_n l'intervalle $\left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$.

Preuve :

Soient $p \in [0;1]$, $\alpha \in]0;1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Soit X une variable suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Par application du théorème de Moivre-Laplace, on sait que la loi de la variable aléatoire $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ "tend" vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right) = P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha)$.(*)

Or par définition de u_α, $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$ (**).

Partons maintenant de l'encadrement :

$$\begin{array}{rcccl|l} -u_\alpha & \leq & \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} & \leq & u_\alpha & \\ -u_\alpha\sqrt{np(1-p)} & \leq & X_n - np & \leq & u_\alpha\sqrt{np(1-p)} & \times\sqrt{np(1-p)} \\ np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} & \leq & X_n & \leq & np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)} & +np \\ p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} & \leq & \frac{X_n}{n} & \leq & p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} & \div n \end{array}$$

Ainsi $P\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right) = P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right)$, d'où le résultat en combinant avec (*) et (**).$\square$