Lycée Blaise Pascal **Mardi 10 décembre 2013**

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 heures

OBLIGATOIRE

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

Le sujet nécessite du papier millimétré.

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : restitution organisée des connaissances

On suppose connues les limites des fonctions polynomiales en $+\infty$.

On suppose savoir déterminer la limite d'une fonction par comparaison à une autre, ainsi que les conditions d'utilisation de cette méthode.

A partir de ces deux arguments, démontrer que $\underset{x\to+\infty}{lim} e^x = +\infty$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Partie B : étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}$.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie C : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer qu'une tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0$$

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2\mathrm{e}^{x-1} = 0$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On note i le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$ et le point B d'affixe $z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}$.

À tout point M d'affixe $z_M = x + \mathrm{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -\mathrm{i}z_M$.

On désigne par I le milieu du segment $[\mathrm{A}M]$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane $(\mathrm{O}I)$ du triangle $\mathrm{OA}M$ est aussi une hauteur du triangle $\mathrm{OB}M'$ (propriété 1) et que $\mathrm{B}M' = 2\mathrm{O}I$ (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Déterminer la forme algébrique de z_M.
   (b) Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.
   (c) Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
   Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.
2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + \mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$.
   (a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.
   (b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.
   (c) Écrire les coordonnées des points I, B et M'.
   (d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.
   (e) Montrer que B$M' = 2$OI.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$du plan.

1. (a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
   (b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.
2. On a représenté en annexe 2 les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{\mathrm{e}}$, et $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).
   Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité mathématiques.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{2u_n} \end{cases}$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   (a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

   (b) Que permet de calculer cet algorithme ?

   (c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 2$.

   (b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

   (c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. *On ne demande pas la valeur de sa limite.*

3. Soit d le nombre réel vérifiant $\mathrm{e}^d = \dfrac{1}{2}$. Donner une valeur approchée de d à 10^{-2} près.

   On considère la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 & = & d \\ v_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}v_n \end{cases}$$

   (a) Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de v_n en fonction de n.

   (b) On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\mathrm{e}^{v_n}$. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

   (d) Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

Annexe

Exercice 3

À rendre avec la copie