Lycée Blaise Pascal **Lundi 31 mars 2014**

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

Exercice 1 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.

Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle OE′F′G′, appelé image de OEFG.

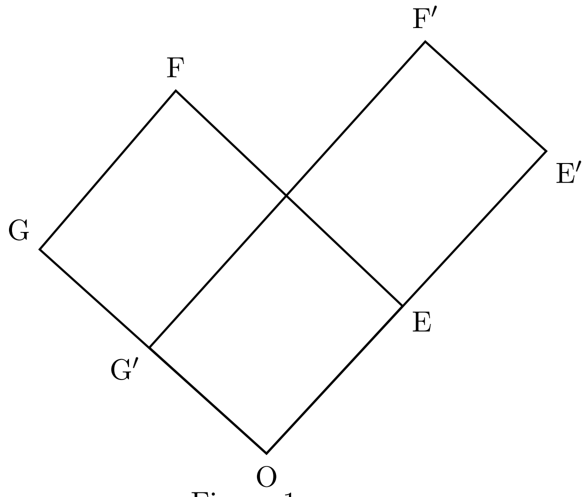


Figure 1

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives $(2\,;\,2)$, $(-1\,;\,5)$ et $(-3\,;\,3)$.

La transformation du logiciel associe à tout point $M(x\,;\,y)$ du plan le point $M'(x'\,;\,y')$, image du point M tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \\ y' & = & \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \end{array}\right.$$

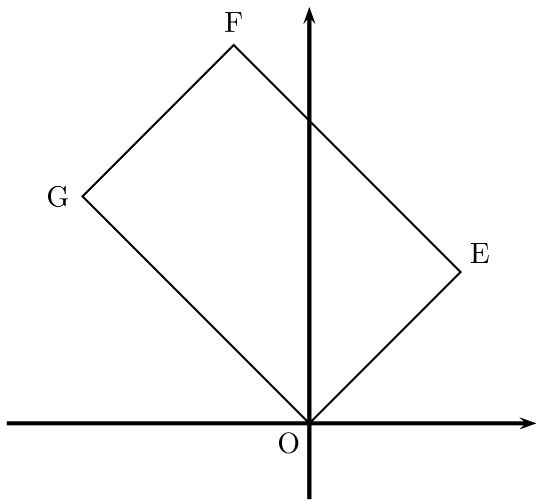


Figure 2

1. (a) Calculer les coordonnées des points E′, F′ et G′, images des points E, F et G par cette transformation.

   (b) Comparer les longueurs OE et OE′ d'une part, OG et OG′ d'autre part.

   Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.
   Une erreur a été commise.
   Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur -1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b FIN POUR
Sortie	Afficher x, afficher y

2. On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	$2,5$	$7,25$	$15,625$	$31,8125$	$63,9063$	$2\ 047,9971$	$65\ 535,9999$
y	$5,5$	$8,75$	$16,375$	$32,1875$	$64,0938$	$2\ 048,0029$	$65\ 536,0001$

   Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG. On définit la suite des points $E_n\,(x_n\ ;\ y_n)$ du plan par $E_0 = \text{E}$ et la relation de récurrence :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

où $(x_{n+1}\ ;\ y_{n+1})$ désignent les coordonnées du point E_{n+1}.
Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

1. On admet que, pour tout entier $n \geq 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :
   $$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$. On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n, les coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ du point E_n vérifient :
   $$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
   (b) Démontrer que la longueur OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1 - z}{\overline{z} - 1}$$

1. Soit C le point d'affixe $z_{\text{C}} = -2 + \text{i}$.
   (a) Calculer l'affixe $z_{\text{C}'}$ du point C′ image de C par la transformation f, et placer les points C et C′ dans le repère donné en annexe.
   (b) Montrer que le point C′ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (c) Montrer que les points A, C et C′ sont alignés.
2. Déterminer et représenter sur la figure donnée en annexe l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.
3. Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathcal{C}$.
4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z' - 1}{z - 1}$ est réel.
   Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?
5. On a placé un point D sur la figure donnée en annexe. Construire son image D′ par la transformation f.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}$.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer qu'une tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0.$$

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2\mathrm{e}^{x-1} = 0.$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Exercice 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

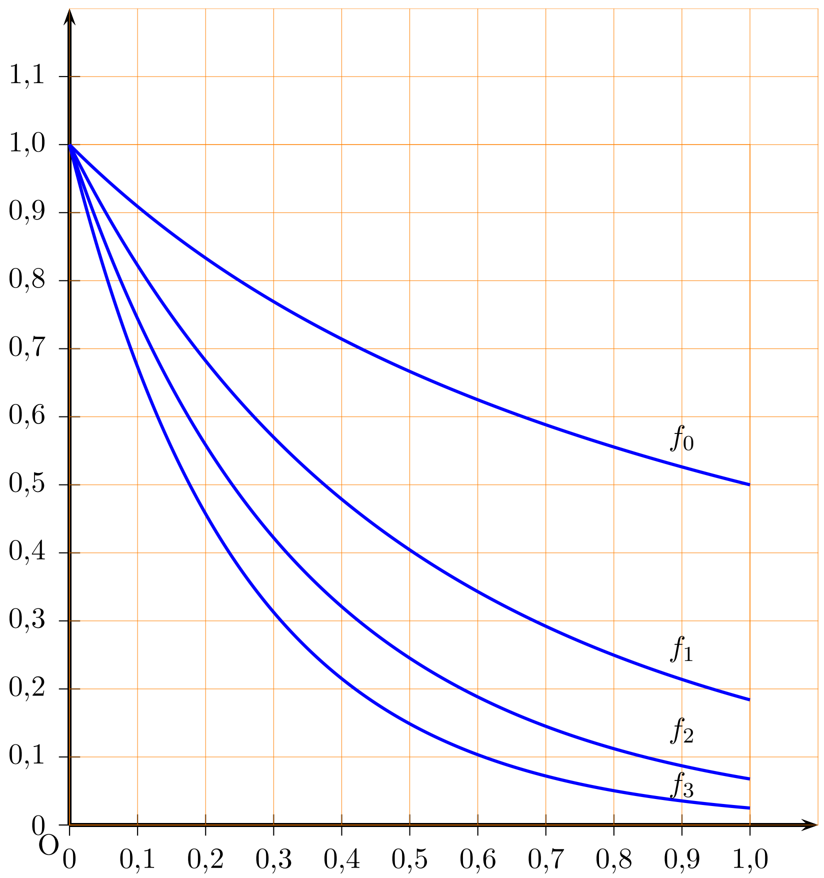
On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

De plus on définit sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ les fonctions f_n et g_n par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n pour différentes valeurs de n :



   (a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.
   (b) Démontrer cette conjecture.

2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leq \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leq \mathrm{e}^{-nx}.$$

   (b) Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3. (a) Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction h_n sur $[0\,;\,1]$ par $h_n(x) = -\frac{1}{n}f_n(x)$.

   Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $h'_n(x) = f_n(x) + \frac{1}{n}g_n(x)$.

   (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n\right)$.

   (c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$.

Annexe à rendre avec la copie

EXERCICE 2