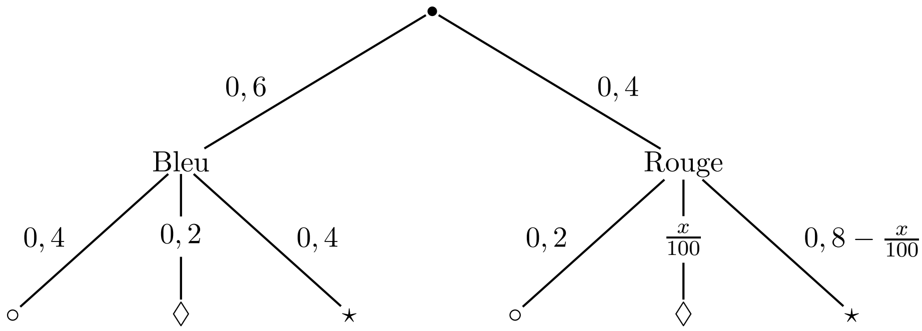
Exercice 1 (adapté de Polynésie, juin 2012) **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : expérience 1
On notera B = ≪ tirer un cube bleu ≫ et L = ≪ tirer un cube marqué d'un losange ≫.

1. Au vu des données de l'énoncé, on peut construire l'arbre de probabilité suivant :



   Ainsi la probabilité de L se lit sur l'arbre : $0,6 \times 0,2 + 0,4 \times \dfrac{x}{100} = 0,12 + 0,004x.$ □

2. On lit de même que la probabilité de tirer un cube marqué d'une étoile est de $0,6\times 0,4+0,4\times\left(0,8-\dfrac{x}{100}\right) = 0,24+0,32-0,004x = 0,56-0,004x$. Il n'y a plus alors qu'à résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 0,12+0,004x &= 0,56-0,004x && +0,004x\\ 0,12+0,008x &= 0,56 && -0,12\\ 0,008x &= 0,44 && \div 0,008\\ x &= 55 \end{aligned}$$

   Ainsi il faut que $\boxed{x \text{ soit égal à } 55}$ pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

3. Les événements B et L sont indépendants si et seulement si $P(B \cap L) = P(B) \times P(L)$.
   Ici $P(B) = 0,6$, $P(L) = 0,12 + 0,004x$ (cf. question 1) et $P(B \cap L) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$. Il n'y a plus alors qu'à résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 0,12 &= 0,6 \times (0,12+0,004x) && +0,004x\\ 0,12 &= 0,072+0,0024x && -0,12\\ 0,048 &= 0,0024x && \div 0,008\\ 20 &= x \end{aligned}$$

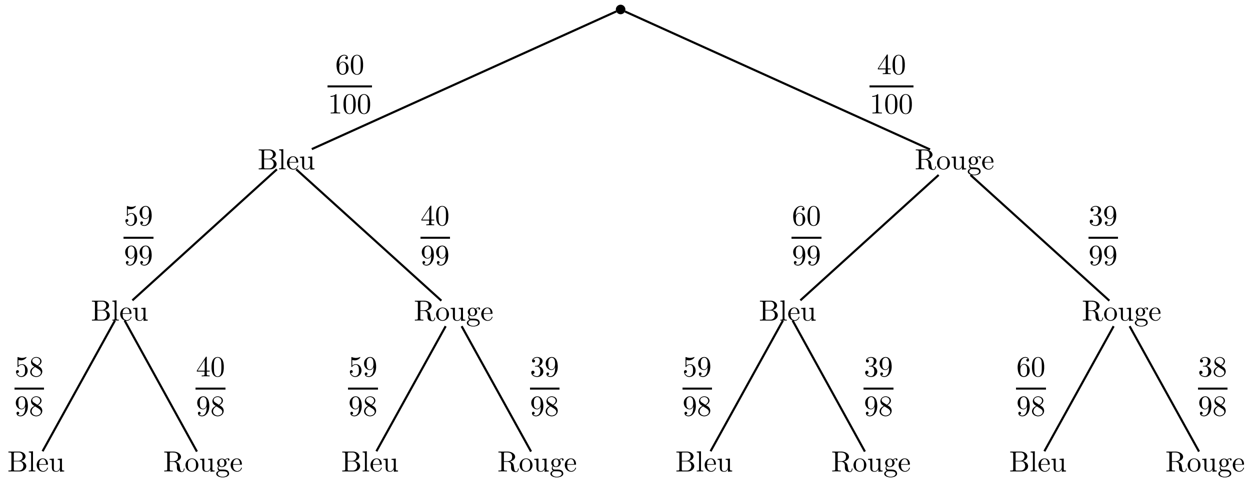
   Ainsi il faut que $\boxed{x \text{ soit égal à } 20}$ pour que les événements B et L soient indépendants.

4. On demande $P_L(B)$, que l'on ne peut pas lire dans l'arbre. On peut donc appliquer la formule : $P_L(B) = \dfrac{P(L \cap B)}{P(L)}$.
   $P(L \cap B) = 0,12$ (cf. question 3) et puisque $x = 50$, $P(L) = 0,12 + 0,004 \times 50 = 0,32$.
   Ainsi $P_L(B) = \dfrac{0,12}{0,32} = \boxed{0,375}$.

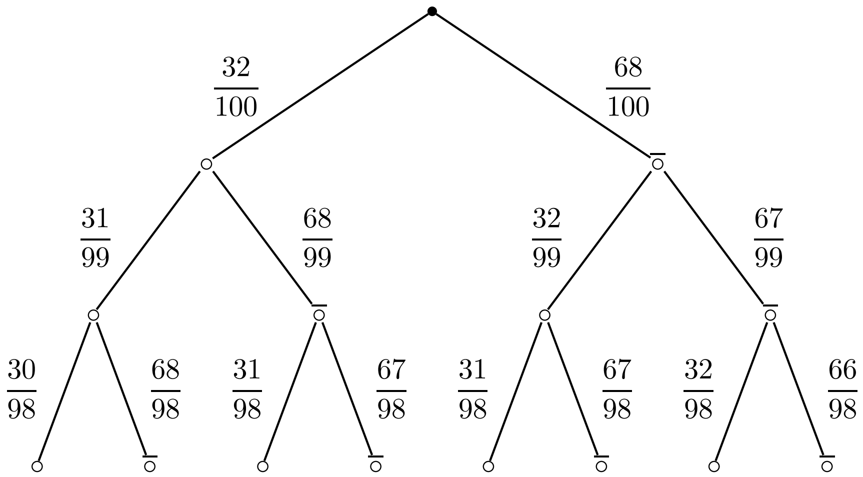
5. On peut se rappeler de l'algorithme du DM n°9, qui était très similaire. Algorithme en fin de correction.

Partie B : expérience 2

Pour les deux premières questions, on peut effectuer un arbre sur la couleur :



1. L'événement A = « tirer au moins un cube rouge » est présent sur les branches 2 à 8. Ainsi $P(A) = 1 - P(\text{première branche}) = 1 - \frac{60}{100} \times \frac{59}{99} \times \frac{58}{98} \approx \boxed{0,788}$
2. L'événement B = « les cubes tirés sont de la même couleur » est présent sur les branches 1 et 8. Ainsi $P(B) = \frac{60}{100} \times \frac{59}{99} \times \frac{58}{98} + \frac{40}{100} \times \frac{39}{99} \times \frac{38}{98} \approx \boxed{0,273}$.
3. Pour cette question, on peut faire un autre arbre, par figure géométrique. Étant donné que l'on ne demande que pour les cercles, inutile de tout détailler. On sait que dans l'urne, il y a initialement $60 \times 40\% = 24$ cubes bleus avec des cercles, et $40 \times 20\% = 8$ cubes rouges avec des cercles, donc en tout 32 cubes avec des cercles. Ainsi :



L'événement C = « tirer exactement un cube marqué d'un cercle » est présent sur les branches 4, 6 et 7. Ainsi $P(C) = \frac{32}{100} \times \frac{68}{99} \times \frac{67}{98} + \frac{68}{100} \times \frac{32}{99} \times \frac{67}{98} + \frac{68}{100} \times \frac{67}{99} \times \frac{32}{98} \approx \boxed{0,451}$.

Exercice 2 (tiré de Pondichéry, 18 avril 2012) — 5 points

1. (a) $z_{C'} = \dfrac{1 - z_C}{\overline{z_C} - 1} = \dfrac{1 - (-2 + i)}{\overline{-2 + i} - 1} = \dfrac{1 + 2 - i}{-2 - i - 1} = \dfrac{3 - i}{-3 - i}$.

   Pour placer C′ par contre ce calcul n'est pas suffisant : il vaut mieux avoir une forme « classique », comme la forme algébrique par exemple. Pour cela, on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur (afin de voir apparaître $(a + b)(a - b)$ et donc de s'affranchir des i au dénominateur) :

   $z_{C'} = \dfrac{(3 - i)(-3 + i)}{(-3 - i)(-3 + i)} = \dfrac{-9 + 3i + 3i + 1}{9 + 1} = \dfrac{-8 + 6i}{10} = \boxed{-\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i}$.

   (b) Pour montrer que le point C′ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 il suffit de montrer que $OC' = 1$.

$$\text{OC}\,' = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1.\square.$$

(c) Comme d'habitude il existe bien des méthodes pour démontrer cet alignement. Le plus simple est peut-être de calculer les coefficients directeurs des droites (AC) et (AC′) et de vérifier qu'ils sont égaux. On peut aussi calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC'}$ et vérifier qu'ils sont colinéaires (leur déterminant est nul), ou encore vérifier que AC' + C'C = AC.

2. On cherche ici à résoudre sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ (car il ne faut pas que le dénominateur s'annule) l'équation :

$$\begin{aligned}
\frac{1-z}{\overline{z}-1} &= 1 && \times(\overline{z}-1)\\
1-z &= \overline{z}-1 && +1+z\\
2 &= \overline{z}+z && \text{Explications plus bas}\\
2 &= 2\mathcal{R}e(z) && \div 2\\
1 &= \mathcal{R}e(z)
\end{aligned}$$

Pour simplifier $\overline{z}+z$, l'idée est de poser comme d'habitude $z = x + \mathrm{i}y$ (avec $x = \mathcal{R}e(z)$ et $y = \mathcal{I}m(z)$). Ainsi $\overline{z}+z = (x - \mathrm{i}y) + x + iy = 2x$.

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des nombres complexes de partie réelle 1, sauf le nombre 1 justement car on a résolu sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Ainsi Δ est $\boxed{\text{la droite d'équation } x = 1 \text{ privée du point A}}$.

3. Soit $M \neq A$. Notons comme d'habitude $z_M = x_M + \mathrm{i}y_M$. Pour montrer que M' appartient au cercle $\mathcal{C}$ il suffit de montrer que $OM' = 1$.

$$OM' = |z'_M| = \left|\frac{1-z_M}{\overline{z_M}-1}\right| = \frac{|1-z_M|}{|\overline{z_M}-1|} = \frac{|1-x_M-\mathrm{i}y_M|}{|x_M-\mathrm{i}y_M-1|} = \frac{\sqrt{(1-x_M)^2+(-y_M)^2}}{\sqrt{(x_M-1)^2+(-y_M)^2}} = 1.\square$$

4. Soit $z \neq 1$. Calculons $\dfrac{z'-1}{z-1} = \dfrac{\frac{1-z}{\overline{z}-1}-1}{z-1} = \dfrac{\frac{1-z}{\overline{z}-1}-\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}-1}}{z-1} = \dfrac{\frac{1-z-(\overline{z}-1)}{\overline{z}-1}}{z-1} = \dfrac{1-z-\overline{z}+1}{(z-1)(\overline{z}-1)} = \dfrac{2-z-\overline{z}}{(z-1)(\overline{z}-1)}$.

Or $\overline{z}-1 = \overline{z-1}$ donc $(z-1)(\overline{z-1}) = |z-1|^2$ qui est réel.

De plus on vient de voir que $z+\overline{z} = 2\mathcal{R}e(z)$ donc $2-z-\overline{z} = 2-2\mathcal{R}e(z)$ qui est réel.

Le quotient de deux nombre réels est réel, ainsi pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.

Puisque $z_A = 1$, on vient de démontrer que $\dfrac{z_{M'}-z_A}{z_M-z_A} = \dfrac{z_{\overline{AM'}}}{z_{\overline{AM}}}$ est réel, ce qui veut dire que les vecteurs $\overline{AM'}$ et $\overline{AM}$ sont colinéaires : donc $\boxed{\text{les points A, } M \text{ et } M' \text{ sont alignés}}$.

5. D'après 3), $\mathrm{D}' \in \mathcal{C}$. D'après 4) les points A, D et D' sont alignés. Ainsi $\mathrm{D}' \in \mathcal{C} \cap (AD)$. Or d'après 2), D' n'est pas le point A. Ainsi, c'est l'autre point d'intersection.

Exercice 3 (adapté de Antilles-Guyane, 19 juin 2012) **5 points**

Partie A : étude de la fonction

1. $$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x-1} &=& 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x &=& -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{l'exponentielle l'emporte donc} \left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x-1} &=& 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 &=& 1 \end{array}\right\} \text{par somme, } \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1}.$$

Ainsi on peut en déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y = 1}$.

2. $$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-1} &=& +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x &=& +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par produit, } \left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{x-1} &=& +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 &=& 1 \end{array}\right\} \text{par somme, } \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}.$$

3. On applique la formule de dérivation d'un produit comme d'habitude :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & x \\ v(x) & = & \mathrm{e}^{x-1} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{x-1} \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout réel x : $f'(x) = (1 \times \mathrm{e}^{x-1} + x \times (\mathrm{e}^{x-1})) + 0 = (1+x)\mathrm{e}^{x-1}$.$\square$

4. On peut maintenant dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$, ci-contre.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Sgn. $x+1$		$-$	0	$+$	
Sgn. e^{x-1}			$+$		
Sgn. $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Var. f	1	$\searrow$	$1-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

1. Une équation de T_a est $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$. On obtient : $\boxed{y = (x-a)(1+a)\mathrm{e}^{a-1} + a\mathrm{e}^{a-1} + 1}$

2. Cette tangente passe par l'origine du repère si et seulement si en remplaçant x par 0 et y par 0, l'égalité est vérifiée, donc :
$0 = (0-a)(1+a)\mathrm{e}^{a-1} + a\mathrm{e}^{a-1} + 1$
$0 = (-a-a^2)\mathrm{e}^{a-1} + a\mathrm{e}^{a-1} + 1$
$0 = (-a-a^2+a)\mathrm{e}^{a-1} + 1$
$0 = -a^2\mathrm{e}^{a-1} + 1$.$\square$

3. Résoudre sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $1 - x^2\mathrm{e}^{x-1} = 0$, c'est trouver les antécédents de 0 par la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{x-1}$.
Pour cela, étudions les variations de g :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & x^2 \\ v(x) & = & \mathrm{e}^{x-1} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 2x \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{x-1} \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout réel $x > 0$: $g'(x) = 0 - (2x \times \mathrm{e}^{x-1} + x^2 \times (\mathrm{e}^{x-1})) = -(2x + x^2)\mathrm{e}^{x-1} = -x(2+x)\mathrm{e}^{x-1}$.
Le tableau de variations est ci-contre. Le TVI nous dit bien que 0 admet un unique antécédent par g sur $]0\ ;\ +\infty[$ car g y est strictement décroissante, continue, et $0 \in]1 ; +\infty[$.
Cet antécédent est 1 car $g(1) = 1 - 1^2\mathrm{e}^{1-1} = 1 - 1 = 0$.

x	0		$+\infty$
Sgn. $-x$		$-$	
Sgn. $2+x$		$+$	
Sgn. e^{x-1}		$+$	
Sgn. $g'(x)$		$-$	
Var. g	1	$\searrow$	$-\infty$

4. On trouve donc $y = (x-1)(1+1)\mathrm{e}^{1-1} + 1\mathrm{e}^{1-1} + 1$ soit $y = 2(x-1) + 2$ soit $\boxed{y = 2x}$.

Exercice 4 (adapté de Pondichéry, 18 avril 2012) — 5 points

1. (a) Les fonctions f_n sont toutes positives sur $[0 ; 1]$ puisque l'exponentielle est toujours positive et que $x \mapsto 1+x$ est positive sur $[0 ; 1]$ également. Ainsi I_n représente « l'aire sous la courbe » de la fonction f_n, entre $x = 0$ et $x = 1$.
Graphiquement, on voit clairement que $I_0 > I_1 > I_2 > I_3$. On peut donc conjecturer que $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

(b) Pour démontrer cette conjecture, il suffit de démontrer, comme on le voit graphiquement, que $\forall x \in [0\ ;\ 1], \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) < f_n(x)$. En intégrant cette inégalité il viendra que $I_{n+1} < I_n$.
Soit donc $x \in [0\ ;\ 1]$ et $n \in \mathbb{N}$: $f_{n+1}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1+x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx-x}}{1+x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx} \times \mathrm{e}^{-x}}{1+x}$.

Or $\forall x \in [0\ ;\ 1], \mathrm{e}^{-0} \geq \mathrm{e}^{-x} \geq \mathrm{e}^{-1}$ donc $1 \geq \mathrm{e}^{-x}$.

On en déduit donc bien que $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx} \times \mathrm{e}^{-x}}{1+x} \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} = f_n(x)$.□

2. (a) Pour tout $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq 1+x \leq 2$ donc en particulier $1+x \geq 1$ donc en multipliant chaque membre par $1+x$ (possible car c'est une quantité plus grande que 1 donc positive), $(1+x)^2 \geq 1+x$. Cela conduit à la double inégalité $(1+x)^2 \geq 1+x \geq 1$.

En passant à l'inverse (toutes les quantités sont positives) : $0 \leq \dfrac{1}{(1+x)^2} \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1$

D'où les inégalités demandées, en multipliant par e^{-nx} qui est positif.

(b) En intégrant l'inégalité précédente sur $[0\,;\,1]$, il vient que :

$$\int_0^1 0\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x.$$

$$0 \leq J_n \leq I_n \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x.$$

Puisque nous avons des inégalités, il y a de fortes chances que nous puissions appliquer le théorème des gendarmes pour déterminer la limite. Calculons le membre de droite de l'inégalité : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}\right]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} - \left(-\frac{\mathrm{e}^{-n\times 0}}{n}\right) = -\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} + \frac{1}{n}$.

Cette expression converge vers 0, donc par application du théorème des gendarmes, $\boxed{I_n \text{ converge vers } 0}$ également (puisque le membre de gauche 0 converge vers 0). Pour la même raison, $\boxed{J_n \text{ converge vers } 0}$.

3. (a) Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout x sur $[0\,;\,1]$, $h_n(x) = -\dfrac{1}{n}f_n(x) = -\dfrac{1}{n}\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$.

$$\begin{cases} u(x) &= \mathrm{e}^{-nx} \\ v(x) &= 1+x \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) &= -n\mathrm{e}^{-nx} \\ v'(x) &= 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$: $h_n'(x) = -\dfrac{1}{n}\dfrac{-n\mathrm{e}^{-nx} \times (1+x) - \mathrm{e}^{-nx} \times 1}{(1+x)^2}$.

Pour faire apparaître $f_n(x)$ et $g_n(x)$, décomposons cette expression :

$h_n'(x) = -\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{-n\mathrm{e}^{-nx} \times (1+x)}{(1+x)^2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\right) = -\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{-n\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} - \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\right) =$
$-\dfrac{1}{n}\dfrac{-n\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} + \dfrac{1}{n}\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} + \dfrac{1}{n}\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} = f_n(x) + \dfrac{1}{n}g_n(x)$.□

(b) On peut maintenant intégrer cette égalité pour retrouver I_n et J_n :

$\displaystyle\int_0^1 h_n'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(f_n(x) + \frac{1}{n}g_n(x)\right)\mathrm{d}x$

$\displaystyle[h_n(x)]_0^1 = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{n}g_n(x)\mathrm{d}x$

$\displaystyle h_n(1) - h_n(0) = I_n + \frac{1}{n}\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x$

$\displaystyle -\frac{1}{n}\frac{\mathrm{e}^{-n}}{1+1} - \left(-\frac{1}{n}\frac{\mathrm{e}^{-n\times 0}}{1+0}\right) = I_n + \frac{1}{n}J_n$

$\displaystyle -\frac{1}{n}\frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} + \frac{1}{n} = I_n + \frac{1}{n}J_n$

$\displaystyle -\frac{1}{n}\frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}J_n = I_n$

$\displaystyle \frac{1}{n}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} + 1 - J_n\right) = I_n$

(c) On a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$. Donc par addition, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n = 1$. Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1}$.

Algorithme de tirage, exercice 1.

Variables :
tirage et x sont deux nombres réels.

Corps de l'algorithme :

Lire la valeur de la variable x
tirage **prend la valeur** *random*()
Si *tirage* $< 0,6$, **Alors**
    Afficher le message ≪ C'est un cube bleu. ≫
    tirage **prend la valeur** *random*()
    Si *tirage* $< 0,4$, **Alors**
        Afficher le message ≪ C'est un cube marqué d'un cercle. ≫
    Sinon Si *tirage* $< 0,6$, **Alors**
        Afficher le message ≪ C'est un cube marqué d'un losange. ≫
    Sinon
        Afficher le message ≪ C'est un cube marqué d'une étoile. ≫
    Fin_Bloc_Si
Sinon
    Afficher le message ≪ C'est un cube rouge. ≫
    tirage **prend la valeur** *random*()
    Si *tirage* $< 0,2$, **Alors**
        Afficher le message ≪ C'est un cube marqué d'un cercle. ≫
    Sinon Si *tirage* $< 0,2 + x \div 100$, **Alors**
        Afficher le message ≪ C'est un cube marqué d'un losange. ≫
    Sinon
        Afficher le message ≪ C'est un cube marqué d'une étoile. ≫
    Fin_Bloc_Si
Fin_Bloc_Si

Schéma de l'exercice 2