Exercice 1 **5 points**

Partie A : restitution organisée des connaissances

Cf. grille d'évaluation. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

Partie B : étude de la fonction f

1. $f(x) = xe^{x-1} + 1 = xe^{x} \times e^{-1} + 1$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{rcl}\text{On sait que } \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} &=& 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-1} &=& e^{-1}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{par produit, } \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x-1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1\end{array}\right\} \text{par somme, } \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1}.$$

On en déduit que $\boxed{\mathcal{C} \text{ a pour asymptote la droite d'équation } [y=1]}$.

2.
$$\left\{\begin{array}{rcl} u(x) &=& x \\ v(x) &=& e^{x-1}\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} u'(x) &=& 1 \\ v'(x) &=& e^{x-1}\end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = 1 \times e^{x-1} + x \times e^{x-1} + 0 = (1+x)e^{x-1}$.□

3. Afin d'étudier les variations de f, étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Sgn. $x+1$		$-$	0	$+$	
Sgn. e^{x-1}			$+$		
Sgn. $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Var. f	1	↘	$1-e^{-2}$	↗	$+\infty$

Partie C : recherche d'une tangente particulière

1. Une équation de T_a est $\boxed{y = (x-a)f'(a) + f(a)}$.
2. $O \in T_a$ ssi ses coordonnées vérifient l'équation de T_a, c'est-à-dire :
$$0 = (0-a)f'(a) + f(a)$$
On remplace
$$0 = -a(a+1)e^{a-1} + ae^{a-1} + 1$$
On factorise
$$0 = ae^{a-1}[-(a+1)+1] + 1$$
On simplifie
$$0 = ae^{a-1}[-a] + 1$$
On re-simplifie
$$0 = -a^2e^{a-1} + 1$$
3. Résoudre cette équation, c'est chercher les antécédents de 0 par g dans $\mathbb{R}_+^*$ avec $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$. On peut donc étudier la fonction g :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(x) &=& x^2 \\ v(x) &=& e^{x-1}\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} u'(x) &=& 2x \\ v'(x) &=& e^{x-1}\end{array}\right.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 0 - (2x \times e^{x-1} + x^2 \times e^{x-1}) = -(2x+x^2)e^{x-1} = -x(2+x)e^{x-1}$

x	0		$+\infty$
Sgn. $-x$		$-$	
Sgn. $2+x$		$+$	
Sgn. e^{x-1}		$+$	
Sgn. $g'(x)$		$-$	
Var. g	1	↘	$-\infty$

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ est strictement décroissante sur }]0;+\infty[\\ g \text{ est continue sur }]0;+\infty[\\ g(0) = 1 \\ g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ 0 \in]-\infty;1] \end{array}\right\}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas monotone, $\exists! x \in [0;+\infty[$ tel que $g(x) = 0$

4. La tangente recherchée se situe donc en $a = 1$, son équation est $y = (x-1)(1+1)e^{1-1} + 1e^{1-1} + 1$ c'est-à-dire en simplifiant $\boxed{y = 2x}$

Exercice 2 **5 points**

1. (a) La forme algébrique d'un nombre, c'est son écriture sous la forme $a+ib$ avec a et b réels. Il suffit d'utiliser la définition de l'exponentielle complexe :

$$z_M = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2(cos(-\tfrac{\pi}{3}) + \mathrm{i}sin(-\tfrac{\pi}{3})) = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \boxed{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}.$$

(b) Ainsi $z_{M'} = -\mathrm{i} \times (1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = -\mathrm{i} + \mathrm{i}^2\sqrt{3} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}.\square$

Rappel : si a et b sont réels, $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$.

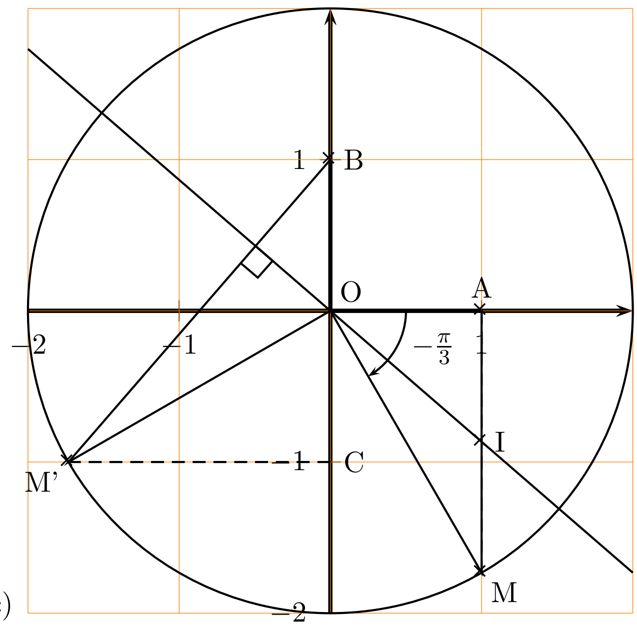
Ainsi $|z_{M'}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \boxed{2}$.

Rappel : pour obtenir un argument de $z_{M'}$, on peut ensuite écrire la forme trigonométrique de $z_{M'}$ et identifier un angle à l'aide de son cosinus et de son sinus ; on commence donc par factoriser par le module :

$z_{M'} = 2\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{-1}{2}\right)$. Je dois donc trouver un angle θ vérifiant $\begin{cases} cos(\theta) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ sin(\theta) = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

En regardant sur un cercle trigonométrique, on s'aperçoit que l'angle $\boxed{\theta = -\dfrac{5\pi}{6}}$ convient.

(c)



Sur le graphique, on « voit » que (OI) est perpendiculaire à (BM') ce qui nous dit que c'est bien une hauteur de (OBM'). La propriété 1 est vérifiée.

De plus, en notant C le point de coordonnées $(0;-1)$, on voit que :
- BC = 2 OA (car BC = 2 et OA = 1)
- MC = AM (= $\sqrt{3}$) = 2 AI (I = mil[AM])
- BCM' est rectangle en C et OAM en A

Ainsi le triangle BCM' est le même triangle que le triangle OAI, mais en 2 fois plus grand. Donc on a également BM' = 2 OI. On pouvait sinon vérifier au compas que l'on pouvait bien faire rentrer deux fois la longueur OI dans BM', ou bien calculer les 2 longueurs à l'aide de la formule de seconde. La propriété 2 est vérifiée.

2. (a) Puisque I est le milieu de $[AM]$, $z_I = \dfrac{z_A + z_M}{2} = \dfrac{1+x+\mathrm{i}y}{2} = \boxed{\dfrac{1+x}{2} + \mathrm{i}\dfrac{y}{2}}$.

(b) $z_{M'} = -\mathrm{i}z_M = -\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y) = \boxed{y - \mathrm{i}x}$.

(c) D'après les calculs précédents : $\boxed{I\left(\dfrac{1+x}{2};\dfrac{y}{2}\right)}$, $\boxed{\mathrm{B}(0;1)}$ et $\boxed{M'(y;-x)}$.

(d) Démontrer que (OI) est une hauteur du triangle OBM', c'est démontrer que $(OI) \perp (BM')$. Pour cela, on peut par ex. :
- démontrer que, si on appelle a_1 le coefficient directeur de (OI) et a_2 le coefficient directeur de (BM'), $a_1 \times a_2 = -1$ (programme de seconde)
- démontrer que $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BM'} = 0$ (programme de 1e S)
- démontrer que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BM'}) = \dfrac{\pi}{2}$ en calculant $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM'})$ c'est-à-dire $arg(z_{\overrightarrow{BM'}}) - arg(z_{\overrightarrow{OI}})$ (programme de Terminale S)

Le plus simple est bien sûr le produit scalaire : travailler avec des vecteurs simplifie les calculs !

(e) Maintenant qu'on a les coordonnées de tous les points, le plus simple est d'appliquer la formule de seconde : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
Ainsi $\mathrm{B}M' = \sqrt{(y-0)^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{y^2 + (1+x)^2}$
et $\mathrm{O}I = \sqrt{\left(\frac{1+x}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{(1+x)^2 + y^2}{2^2}} = \frac{\sqrt{(1+x)^2+y^2}}{2}$.
On a donc bien $\mathrm{B}M' = 2\mathrm{O}I$.$\square$

Exercice 3 **5 points**

Partie A

1. De la même manière qu'à l'exercice 1 on trouve $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2.
$$\left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & (x+1) \\ v(x) & = & \mathrm{e}^x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^x \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x+1) \times \mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$.$\square$

3.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Sgn. $x+2$		$-$	0	$+$	
Sgn. e^x			$+$		
Sgn. $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Var. f	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. (a) Partons de $g_m(x) = 0$ et essayons de faire apparaître $f(x)$.

$$\begin{aligned} g_m(x) &= 0 && \text{On remplace par les valeurs} \\ x + 1 - m\mathrm{e}^{-x} &= 0 && \text{On multiplie par } \mathrm{e}^x \\ (x+1)\mathrm{e}^x - m &= 0 && \text{On ajoute } m \\ (x+1)\mathrm{e}^x &= m && \text{On a fait apparaître } f(x) \\ f(x) &= m \end{aligned}$$

(b) En lisant le tableau de variation de f, on voit que :
- pour $m < -\mathrm{e}^{-2}$, il n'y a aucun point d'intersection
- pour $m = -\mathrm{e}^{-2}$, il y a exactement un point d'intersection
- pour $-\mathrm{e}^{-2} < m < 0$ il y a exactement deux points d'intersection
- pour $m \geq 0$ il y a exactement un point d'intersection

2. Les courbes n'ont aucun point en commun sur le graphique, il suffit de regarder par exemple la valeur de g_m en 0 pour les trois valeurs de m pour conclure.
   - $g_0(0) = 0 + 1 - 0 \times \mathrm{e}^{-0} = 1$ donc $\boxed{\text{la courbe 2 est } \mathcal{C}_0}$
   - $g_{\mathrm{e}}(0) = 0 + 1 - \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-0} = 1 - \mathrm{e}$ donc $\boxed{\text{la courbe 3 est } \mathcal{C}_{\mathrm{e}}}$
   - $g_{-\mathrm{e}}(0) = 0 + 1 - (-\mathrm{e}) \times \mathrm{e}^{-0} = 1 + \mathrm{e}$ donc $\boxed{\text{la courbe 1 est } \mathcal{C}_{-\mathrm{e}}}$ (on pouvait aussi conclure par déduction pour la 3e courbe sans mener de calcul)

3. Étudier la position de $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$, c'est étudier le signe de $g_m(x) - (x+1)$.
   $g_m(x) - (x+1) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x} - (x+1) = -m\mathrm{e}^{-x}$. Ce produit est clairement du signe opposé de m (puisque l'exponentielle est toujours positive), donc :
   - lorsque $m = 0$, $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{D}$ sont confondus (c'est la courbe 2).
   - lorsque $m < 0$, $\mathcal{C}_m$ est toujours strictement au-dessus de $\mathcal{D}$
   - lorsque $m > 0$, $\mathcal{C}_m$ est toujours strictement en-dessous de $\mathcal{D}$

Exercice 4 - Non spécialiste **5 points**

1. (a) Voici un tableau de suivi des valeurs pas à pas :

Instruction	n	u	i
Initialisation	3	1	-
Pour i variant de 1 à n	3	1	1
	$i \leq n$ donc on rentre dans la boucle		
Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$	3	$\sqrt{2\times 1}=\sqrt{2}$	1
Pour i variant de 1 à n	3	1	2
	$i \leq n$ donc on rentre dans la boucle		
Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$	3	$\sqrt{2\sqrt{2}}$	2
Pour i variant de 1 à n	3	1	3
	$i \leq n$ donc on rentre dans la boucle		
Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$	3	$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$	3
Pour i variant de 1 à n	3	1	4
	$i > n$ donc on sort de la boucle		

Ainsi cet algorithme affiche $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \approx \boxed{1{,}8340}$ à 10^{-4} près lorsque l'on choisit $n=3$.

(b) Cet algorithme permet de $\boxed{\text{calculer et d'afficher } u_n}$ lorsque l'on saisit n en entrée.

(c) En regardant le tableau, on peut conjecturer que (u_n) semble $\boxed{\text{croissante et convergente vers 2}}$.

2. (a) posons $P(n)$: « $0 < u_n \leq 2$ ».
Initialisation : pour $n=0$, $u_0 = 1$ et on a bien $0 < 1 \leq 2$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie et démontrons $P(n+1)$. Pour cela il suffit de faire apparaître $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$ donc de multiplier par 2 puis de prendre la racine :

$$\begin{array}{rcccl}
0 < & u_n & \leq 2 & & \\
 & & & & \text{On multiplie la double inégalité par 2} \\
0 < & 2u_n & \leq 4 & & \\
 & & & & \text{On compose par } x \mapsto \sqrt{x} \text{ qui est croissante} \\
\sqrt{0} < & \sqrt{2u_n} & \leq \sqrt{4} & & \\
 & & & & \text{On simplifie} \\
0 < & u_{n+1} & \leq 2 & &
\end{array}$$

Conclusion : On vient de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 2.\square$

(b) Pour déterminer le sens de variation de (u_n), on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (ce quotient existe bien car pour tout n, $u_n > 0$)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2u_n}}{u_n} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{u_n}}{u_n} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{u_n}} = \sqrt{\frac{2}{u_n}}.$$

On vient de voir que pour tout n, $u_n \leq 2$ d'où $1 \leq \dfrac{2}{u_n}$ d'où $\sqrt{1} \leq \sqrt{\dfrac{2}{u_n}}$, or $\sqrt{1} = 1$ donc on vient de montrer que pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

On pouvait aussi étudier le signe de $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n = \dfrac{(\sqrt{2u_n}-u_n)(\sqrt{2u_n}+u_n)}{\sqrt{2u_n}+u_n} = \dfrac{\left(\sqrt{2u_n}\right)^2 - u_n^2}{\sqrt{2u_n}+u_n} = \dfrac{2u_n - u_n^2}{\sqrt{2u_n}+u_n} = \dfrac{u_n(2-u_n)}{\sqrt{2u_n}+u_n}$ qui est positif en menant un tableau de signes, car u_n est entre 0 et 2.

(c) (u_n) est croissante et majorée (par 2) donc elle est convergente.

3. On sait que la fonction exponentielle est croissante, de plus $\mathrm{e}^{-0{,}7} \approx 0,497$ et $\mathrm{e}^{-0{,}69} \approx 0,502$. Ainsi $\boxed{d = -0,7 \pm 10^{-2}}$.

(a) Il est clair avec la définition que v est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de terme initial $v_0 = d$ donc pour tout entier naturel n, $\boxed{v_n = d \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

(b) En utilisant l'égalité admise ainsi que la question précédente, on en déduit que pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n = 2\mathrm{e}^{d\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$.

(c) $$\left.\begin{array}{rcl} \underset{n\to+\infty}{lim}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & = & 0 \\ \underset{n\to+\infty}{lim}\ d & = & d \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par produit, } \left.\begin{array}{rcl} \underset{n\to+\infty}{lim}\ d\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & = & 0 \\ \underset{X\to 0}{lim}\,\mathrm{e}^X & = & 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par composition,} \\ \underset{n\to+\infty}{lim}\ \mathrm{e}^{d\times\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1. \end{array}$$

Et enfin par produit par 2, $\boxed{\underset{n\to+\infty}{lim}\ u_n = 2}$.

(d) Il faut calculer les différentes valeurs de la suite u jusqu'à en trouver une qui dépasse. Il faut donc continuer tant que les valeurs ne dépassent pas $1,999$! Pour calculer les valeurs de u, on peut soit utiliser le même algorithme qu'au début, soit se servir de l'expression de u en fonction de n qu'on vient de découvrir.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leq 1,999$:
	Affecter à n la valeur $n+1$
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ (*ou bien* Affecter à u la valeur $2\mathrm{e}^{d\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$)
	Fin de Tant que
Sortie :	Afficher n

Exercice 4 - Spécialiste **5 points**

Partie A

1. Voici un tableau de suivi des valeurs pas à pas :

Instruction	a	b	c
Initialisation	13	4	0
Tant que $a > b$	$13 > 4$ donc on rentre dans la boucle		
Affecter à c la valeur $c+1$	13	4	1
Affecter à a la valeur $a-b$	9	4	1
Tant que $a > b$	$9 > 4$ donc on rentre dans la boucle		
Affecter à c la valeur $c+1$	9	4	2
Affecter à a la valeur $a-b$	5	4	2
Tant que $a > b$	$5 > 4$ donc on rentre dans la boucle		
Affecter à c la valeur $c+1$	5	4	3
Affecter à a la valeur $a-b$	1	4	3
Tant que $a > b$	$1 \leq 4$ donc on sort de la boucle		

Affichage de 3 et de 1.

2. En règle générale, cet algorithme permet de calculer le quotient (stocké dans c) et le reste (stocké dans a) de la division euclidienne de a par b. Effectivement :
   - c compte combien de fois on peut « faire rentrer » b dans a puisqu'on l'incrémente de 1 à chaque fois, en soustrayant b de a à chaque fois
   - et puisqu'on enlève b de a à chaque itération, à la fin on a enlevé $c \times b$ de a donc dans a il reste... le reste !

Partie B

1. *Étape* 1 : À la lettre U, correspond le nombre $m = 20$ dans le tableau.
   Étape 2 : $9m + 5 = 9 \times 20 + 5 = 185$. $185 = 7 \times 26 + 3$ donc le reste vaut $p = 3$.
   Étape 3 : Au nombre $p = 3$, correspond la lettre D dans le tableau.

   Ainsi le code de la lettre U est $\boxed{\text{la lettre } D}$.
2. L'algorithme de la partie A calcule le reste de la division de a par b (dans a) ; on n'a pas besoin du quotient donc on peut supprimer la variable c ainsi que ses manipulations. Il suffit d'initialiser a à $9m + 5$ et b à 26.

Variables :	a est un entier naturel
	b est un entier naturel
	m est un entier naturel
Initialisation :	Demander la valeur de m
	Affecter à a la valeur $9 \times m + 5$
	Affecter à b la valeur 26
Traitement :	Tant que $a > b$
	Affecter à a la valeur $a - b$
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher a

Partie C

1. Pour trouver un nombre x qui vérifie la congruence demandée, on peut essayer nombre par nombre :

$x =$	0	1	2	3	...
Reste de $9x$ par 26	0	9	18	1	...

   On trouve donc $\boxed{x = 3}$ puisque $9 \times 3 = 27 = 1 \times 26 + 1$.

2.
$$\begin{aligned} 9m + 5 &\equiv p \quad [26] && \text{On multiplie par 3} \\ 27m + 15 &\equiv 3p \quad [26] && 27 \equiv 1 \quad [26] \text{ donc } 27m \equiv m \quad [26] \\ m + 15 &\equiv 3p \quad [26] && \text{On soustrait 15} \\ m &\equiv 3p - 15 \quad [26] \end{aligned}$$

3. À la lettre B, correspond le nombre $p = 1$ dans le tableau.
   La question précédente nous montre que le nombre m qui donne 1 après opération est un nombre tel que $m \equiv 3 \times 1 - 15 \quad [26]$.
   $3 \times 1 - 15 = -12$ et $-12 \equiv 14 \quad [26]$ car $-12 + 26 = 14$.
   Au nombre 14 correspond la lettre O. Ainsi c'est $\boxed{\text{la lettre } O}$ qui, codée, donne la lettre B.