Lycée Blaise Pascal — Mardi 10 décembre 2013

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

Le sujet nécessite du papier millimétré.

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : restitution organisée des connaissances
On suppose connues les limites des fonctions polynomiales en $+\infty$.
On suppose savoir déterminer la limite d'une fonction par comparaison à une autre, ainsi que les conditions d'utilisation de cette méthode.
A partir de ces deux arguments, démontrer que $\underset{x\to+\infty}{lim}\ e^x = +\infty$.
En déduire la limite de f en $+\infty$.

Partie B : étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}$.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie C : recherche d'une tangente particulière
Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer qu'une tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0$$

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2\mathrm{e}^{x-1} = 0$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On note i le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
On considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$ et le point B d'affixe $z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}$.
À tout point M d'affixe $z_M = x + \mathrm{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -\mathrm{i}z_M$.
On désigne par I le milieu du segment $[\mathrm{A}M]$.
Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane $(\mathrm{O}I)$ du triangle $\mathrm{OA}M$ est aussi une hauteur du triangle $\mathrm{OB}M'$ (propriété 1) et que $\mathrm{B}M' = 2\mathrm{O}I$ (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Déterminer la forme algébrique de z_M.
   (b) Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.
   (c) Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
   Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.
2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + \mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$.
   (a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.
   (b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.
   (c) Écrire les coordonnées des points I, B et M'.
   (d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.
   (e) Montrer que B$M' = 2$OI.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$du plan.

1. (a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
   (b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.
2. On a représenté en annexe 2 les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{\mathrm{e}}$, et $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).
   Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant choisi la spécialité mathématiques.

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a est un entier naturel
	b est un entier naturel
	c est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à c la valeur 0
	Demander la valeur de a
	Demander la valeur de b
Traitement :	Tant que $a > b$
	Affecter à c la valeur $c + 1$
	Affecter à a la valeur $a - b$
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher c
	Afficher a

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
2. Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.
2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \quad [26]$.
2. Démontrer alors l'équivalence :

$$9m + 5 \equiv p \quad [26] \iff m \equiv 3p - 15 \quad [26]$$

3. Décoder alors la lettre B.

Annexe

Exercice 3

À rendre avec la copie