La figure plus bas sera complétée et remise avec la copie. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$.

Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \text{e}^{-x}\cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$ plus bas. On considère également la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \text{e}^{-x}$ et on nomme $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$.

1. (a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$,
$$-\text{e}^{-x} \leq f(x) \leq \text{e}^{-x}.$$
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathcal{C}$.
3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.
4. (a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$,
$$f'(x) = -\text{e}^{-x}\left[\cos(4x) + 4\sin(4x)\right].$$
   (b) En déduire que les courbes Γ et $\mathcal{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.
5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
   Compléter le graphique donné ci-après, en y traçant $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$.
6. *Pour les élèves ayant participé à la sortie à Tours :* comment s'appelle le type d'ondes qui donne ce genre de graphiques, et que l'on a étudié au lycée Vaucanson ? Donner deux exemples de phénomènes physiques donnant ce type d'ondes.