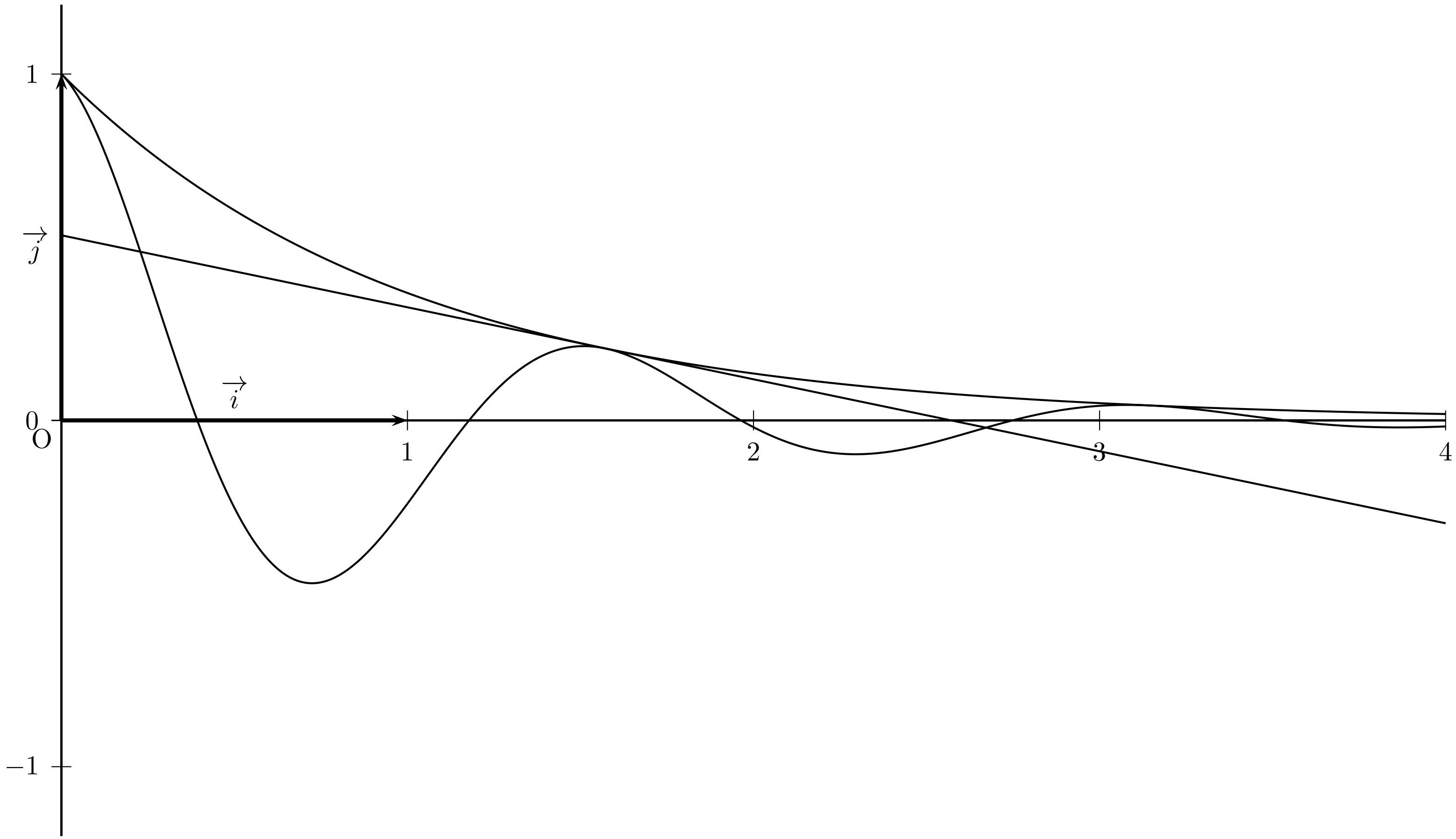
1. (a) $\forall x \in [0;+\infty[, -1 \leq \cos(4x) \leq 1$
   De plus $\forall x \in [0;+\infty[$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc on peut multiplier chaque membre de l'inéquation par e^{-x}, il vient alors le résultat demandé :
   $\forall x \in [0;+\infty[, -\mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-x}\cos(4x) \leq \mathrm{e}^{-x}$
   (b) Clairement les membres de gauche et de droite tendent vers 0 en $+\infty$ donc on est dans le cas d'application du théorème des gendarmes, et ainsi : $\underset{x\to+\infty}{lim} f(x) = \boxed{0}$.
2. Pour déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathcal{C}$, on peut résoudre dans $[0;+\infty[$ l'équation $f(x) = g(x)$.
   Il s'agit donc de résoudre $\mathrm{e}^{-x}\cos(4x) = \mathrm{e}^{-x}$, c'est-à-dire $\cos(4x) = 1$. Dans $[0;+\infty[$, c'est équivalent à $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $4x = 0 + 2k\pi$.
   $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{N} \right\}$
   Les points communs à Γ et $\mathcal{C}$ sont donc $\boxed{\left\{ \left(\dfrac{k\pi}{2}; \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{2}} \right) | k \in \mathbb{N} \right\}}$.
3. (a) Afin de montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, on peut montrer que la quantité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ne dépend pas de n, ça sera alors la raison.
   On peut déjà se rendre compte que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = g\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}}$ d'après la question 2.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{(n+1)\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{2}}} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.
   On vient donc de démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\boxed{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}}$.
   (b) $0 < \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} < 1$ et $u_0 = 1 > 0$ donc (u_n) est $\boxed{\text{strictement décroissante}}$ et $\boxed{\text{converge vers 0}}$.
4. (a) $f(x)$ est sous la forme du produit $u(x) \times v(x)$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u(x) & = & \mathrm{e}^{-x} \\ v(x) & = & \cos(4x) \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} u'(x) & = & -\mathrm{e}^{-x} \\ v'(x) & = & -4\sin(4x) \end{array} \right.$$

   Ainsi $\forall x \in [0;+\infty[, f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \times \cos(4x) + \mathrm{e}^{-x} \times (-4\sin(4x)) = -\mathrm{e}^{-x}\left[\cos(4x) + 4\sin(4x)\right]$
   (b) Il va nous falloir étudier la dérivée de g pour le coefficient directeur des tangentes :
   $\forall x \in [0;+\infty[, g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
   Soit x l'abscisse d'un point commun à Γ et $\mathcal{C}$. Ainsi $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $x = \dfrac{k\pi}{2}$.
   Alors $f'\left(\dfrac{k\pi}{2}\right) = -\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{2}}\left[\cos\left(4\dfrac{k\pi}{2}\right) + 4\sin\left(4\dfrac{k\pi}{2}\right)\right] = -\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{2}}\left[\cos(2k\pi) + 4\sin(2k\pi)\right] = -\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{2}}\left[1 + 4 \times 0\right] = -\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{2}} = g'\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$.
   Ainsi en chacun des points communs, les tangentes aux deux courbes ont même coefficient directeur. Elles sont donc parallèles, et puisqu'elles ont un point en commun, ce sont les mêmes.
5. $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \approx -0,207$ donc à 10^{-1} près par excès, le coefficient directeur de $\mathcal{T}$ vaut $\boxed{-0,2}$.
   Cf. graphique au dos pour les tracés.
6. Ces ondes sont des oscillations amorties. On a vu plusieurs exemples : un exemple électrique (circuit résistance, bobine, condensateur), un exemple mécanique (pendule avec frottement) ainsi qu'un exemple de régulateur (il est intéressant de savoir que le régulateur de vitesse sur une voiture donne également ce genre d'ondes, donc en fait si on lui demande de réguler à 90 km/h, pour atteindre plus rapidement il va commencer par dépasser légèrement avant d'atteindre la vitesse de croisière !).


1
0
O
−1
1
2
3
4
$\vec{i}$
$\vec{j}$