On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

1. Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
2. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^{-x} \leq e^x$.
3. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.
4. On considère les fonctions g et h définies sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{e^x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{2e^x}$.
   Au dos sont tracées, dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, les courbes représentatives de g et h, notées respectivement Γ_1 et Γ_2.
   (a) Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
   (b) Que peut-on en déduire pour les courbes Γ, Γ_1, et Γ_2 ?
   Tracer Γ sur l'annexe de la page 7, en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

1. Justifier l'existence de (I_n), et donner une interprétation géométrique de (I_n).
2. (a) Démontrer, que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$.
   (b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
   (c) Démontrer que la suite (I_n) est convergente et determiner sa limite.

Partie C

Soit (J_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $J_n = \displaystyle\int_0^{n} f(x)\,dx$.

1. En utilisant l'encadrement obtenu dans la question A.4.a), démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2}\left(1 - e^{-n}\right) \leq J_n \leq 1 - e^{-n} \leq 1.$$

2. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
   En déduire qu'elle converge.
3. On note L la limite de la suite (J_n) et on admet le théorème suivant :
   « Si u_n, v_n et w_n sont trois suites convergentes de limites respectives a, b et c et si, à partir d'un certain rang on a pour tout n, $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors $a \leq b \leq c$ ».
   Donner un encadrement de L.
4. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

   On note v la primitive de u sur $\mathbb{R}$ telle que $v(1) = \dfrac{\pi}{4}$.
   On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}$.
   (a) Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x)^2 + 1}$.
   (b) On admet que f est la dérivée de la fonction $x \mapsto v(e^x)$.
   En déduire la valeur exacte de L.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie