Devoir maison n°13 Correction

Exercice n°91 p.163

Partie A.

1. f est une différence, et le second terme est un quotient :

$$\begin{cases} u(x) &= \ln(x+1) \\ v(x) &= x+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) &= \dfrac{1}{x+1} \\ v'(x) &= 1 \end{cases}$$

Ainsi $f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{x+1} \times (x+1) - \ln(x+1) \times 1}{(x+1)^2} = \boxed{1 - \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}}$

2. (a) Pour vérifier que N est strictement croissante, dérivons-la :
$N'(x) = 2 \times 1 \times (1+x) + \dfrac{1}{1+x} - 0 = 2(1+x) + \dfrac{1}{1+x}$.
Puisque l'on travaille sur $]-1;+\infty[$, $1+x > 0$ donc $N'(x)$ est la somme de deux expressions strictement positives, donc est strictement positive. Ainsi N est bien strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.$\square$.

   (b) $N(0) = (1+0)^2 + \ln(1+0) - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$.
Quel est le lien avec f ? Si on réfléchit un peu, on se rend compte que $N(x)$ est certainement lié à $f'(x)$. Effectivement, en réduisant au même dénominateur : $f'(x) = 1 - \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2}{(x+1)^2} - \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2 - (1-\ln(x+1))}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{N(x)}{(x+1)^2}$
On a montré que N était strictement croissante et que $N(0) = 0$, donc le signe de $N(x)$ est maintenant clair, et on peut en déduire les variations de f (le tableau n'était pas demandé, mais on peut facilement calculer les limites par croissances comparées puisque ln est négligeable face aux puissances) :

x	-1		0		$+\infty$
Sgn. $N(x)$		$-$	0	$+$	
Sgn. $(1+x)^2$	0		$+$		
Sgn. $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Var. f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3. Il est clair sur le dessin que le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec Δ est $\boxed{(0;0)}$. Afin de le démontrer, il faut trouver les points $(x;y)$ du plan qui vérifient :
$\begin{cases} (x;y) \in \mathcal{C} \\ (x;y) \in \Delta \end{cases} \iff \begin{cases} y &= f(x) \\ y &= x \end{cases}$ donc résoudre $f(x) = x$

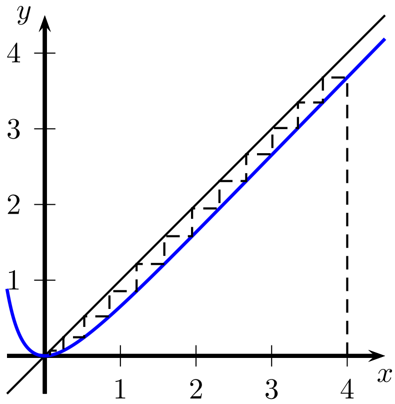
Cette résolution est assez claire puisque :

$$f(x) = x \iff \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \iff \ln(x+1) = 0 \iff x+1 = 1 \iff x = 0.$$

Partie B.

1. f est strictement croissante sur $[0;4]$. Or $f(0)=0$ et $f(4)=4-\dfrac{\ln(4+1)}{4+1}=4-\dfrac{\ln(5)}{5}\approx 3,7<4$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\forall x\in[0;4], f(x)\in[f(0);f(4)]\subset[0;4]$.$\square$

2. (a) En utilisant la représentation graphique, on peut conjecturer que $\boxed{u \text{ est strictement décroissante}}$ et $\boxed{\text{convergente vers } 0}$:



(b) Posons P_n : « $0\le u_n\le 4$ ».
Initialisation : pour $n=0$, $u_0=4$ et $0\le 4\le 4$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie et démontrons $P(n+1)$.

$$\begin{array}{rcccl|l}
0 & \le & u_n & \le & 4 & \\
 & & & & & \text{On compose par } f \text{ qui est strictement croissante sur } [0;4] \\
f(0) & \le & f(u_n) & \le & f(4) & \\
 & & & & & \text{On remplace par les valeurs} \\
0 & \le & u_{n+1} & \le & 4-\dfrac{\ln(5)}{5} & \\
 & & & & & 4-\dfrac{\ln(5)}{5}<4 \\
0 & \le & u_{n+1} & \le & 4 &
\end{array}$$

Conclusion : On vient de démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 0\le u_n\le 4$.

(c) En regardant l'expression de $f(x)$, on voit que $u_{n+1}-u_n$ va se simplifier et qu'on pourra étudier facilement son signe :
$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=u_n-\dfrac{\ln(u_n+1)}{u_n+1}-u_n=-\dfrac{\ln(u_n+1)}{u_n+1}$.
On sait que $\forall n\in\mathbb{N}, 0\le u_n\le 4$ ainsi $1\le u_n+1\le 5$. En composant avec la fonction ln qui est croissante, on en déduit que $0\le \ln(u_n+1)$. Ainsi par règle des signes $u_{n+1}-u_n$ est toujours strictement négatif donc $\boxed{u \text{ est strictement décroissante}}$.

(d) u est strictement décroissante et minorée (par 0) donc $\boxed{\text{elle est convergente}}$. Sa limite ℓ vérifie $f(\ell)=\ell$, équation que nous avons résolue en A.3) : ainsi $\boxed{\ell=0}$.