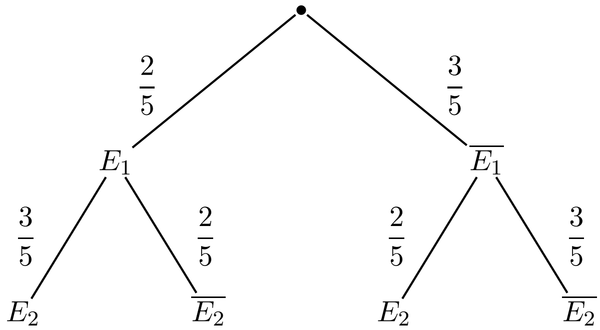
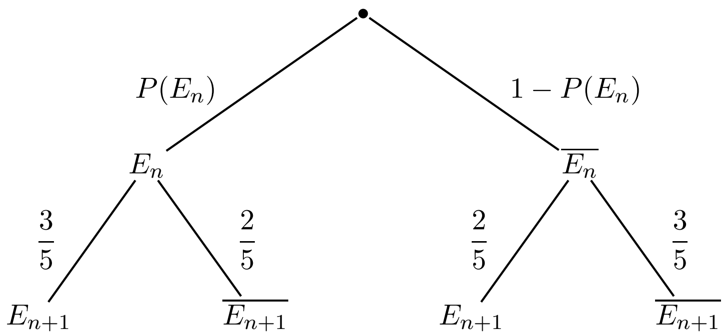
Exercice n°57 p.373

1. (a) L'énoncé nous dit que l'on tire au hasard une bille de S_1 qui en contient 3 jaunes et 2 vertes. Ainsi $\boxed{P(E_1) = \frac{2}{5}}$.
Si on a tiré une bille verte, alors on la met dans S_2 qui en contiendra donc 3 plus 2 jaunes. Sinon, S_2 contiendra 2 billes vertes plus 3 jaunes. Ainsi : $\boxed{P_{E_1}(E_2) = \frac{3}{5}}$ et $\boxed{P_{\overline{E_1}}(E_2) = \frac{2}{5}}$.
On peut maintenant dresser l'arbre de probabilités suivant :



Ainsi la probabilité de E_2 se lit sur l'arbre : $\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \boxed{\frac{12}{25}}$.

(b) On peut faire un arbre équivalent pour tout n : si l'on a tiré une bille verte dans S_n, alors on la met dans S_{n+1} qui en contiendra donc 3 plus 2 jaunes. Sinon, S_{n+1} contiendra 2 billes vertes plus 3 jaunes. Ainsi :



La probabilité de E_{n+1} se lit alors sur l'arbre : $P(E_n) \times \frac{3}{5} + (1 - P(E_n)) \times \frac{2}{5} = P(E_n) \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - P(E_n) \times \frac{2}{5} = \boxed{\frac{2}{5} + \frac{P(E_n)}{5}}$.

2. (a) La suite (u) est définie par récurrence, c'est donc une bonne idée de penser au raisonnement par récurrence. Posons P_n : « $u_n \leq 0,5$ ».
Initialisation : pour $n = 1$, $u_1 = 0,4 < 0,5$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie et démontrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned}
u_n &\leq 0,5 && \\
&&& \times 0,2 \\
0,2 \times u_n &\leq 0,1 && \\
&&& +0,4 \\
0,2 \times u_n + 0,4 &\leq 0,5 && \\
&&& \text{On a fait apparaître } u_{n+1} \\
u_{n+1} &\leq 0,5 &&
\end{aligned}$$

Conclusion : On vient de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 0,5$.

(b) Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$:
$u_{n+1} - u_n = 0,2 \times u_n + 0,4 - u_n = -0,8 \times u_n + 0,4$.

Utilisons la question précédente pour trouver la position de ce terme par rapport à 0 :

$$\begin{array}{rcl} u_n & \leq & 0,5 \\ -0,8\times u_n & \geq & -0,4 \\ -0,8\times u_n+0,4 & \geq & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \times(-0,8) \\ +0,4 \end{array}$$

Ainsi la suite u est croissante.$\square$

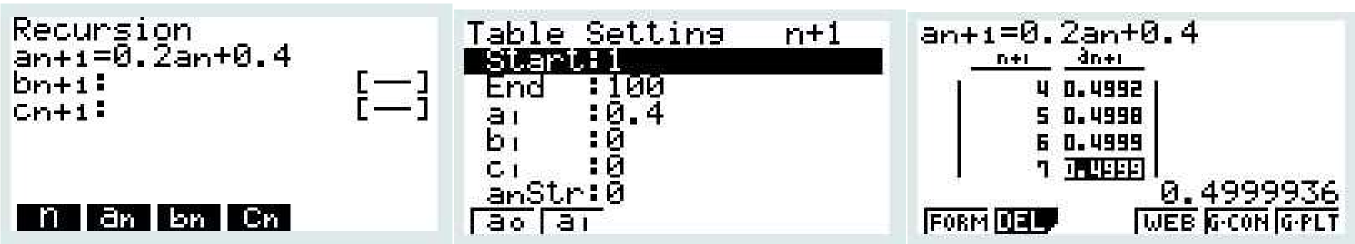
(c) La suite u est croissante et majorée, elle est donc convergente vers une limite finie ℓ.

Puisque $u_{n+1} = 0,2\times u_n + 0,4$: le membre de gauche tend vers ℓ ; le membre de gauche tend, par multiplication et addition, vers $0,2\ell+0,4$. Puisque la limite de u est unique, il faut donc que ℓ vérifie $\ell = 0,2\ell+0,4$, c'est-à-dire $\boxed{\ell = 0,5}$.

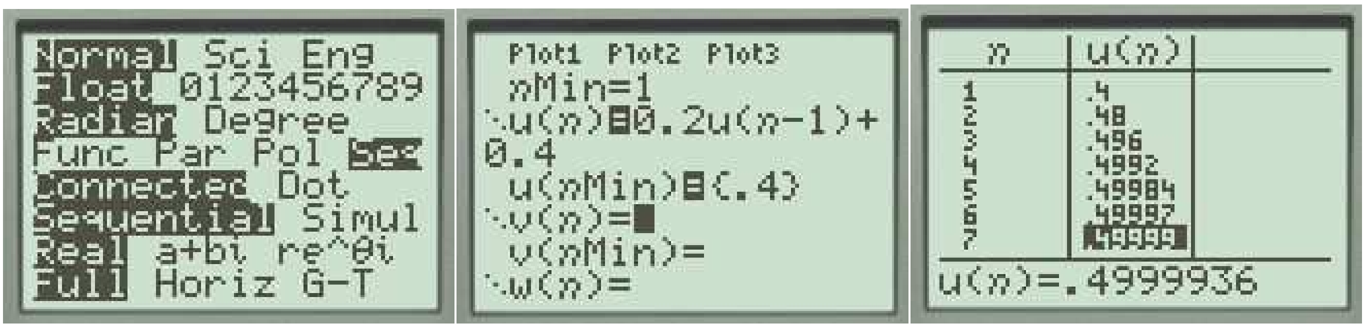
3. (a) En reprenant les résultats précédents, on se rend compte que pour tout $n \geq 1$, $P(E_n) = u_n$, car les deux suites sont initialisées à la même valeur et vérifient la même relation de récurrence. Ainsi les probabilités $P(E_n)$ sont croissantes et tendent vers $0,5$.

(b) Pour cette question, on utilise la calculatrice (à moins de calculer à la main tous les termes. . .) :

Sur Casio : menu "Recur", on rentre la relation de récurrence, puis touche de fonction "Set" pour dire de débuter par le terme de rang 1, lui donner sa valeur, et donner les valeurs de n dont on veut les termes. Enfin exit et touche de fonction "Table" pour voir apparaître la table.



Sur Texas : dans les paramètres, choisir le mode "Seq", puis appuyer sur la touche en haut à gauche (Y= ou f(x)) pour rentrer l'expression de la suite. Ici le terme initial est de rang 1 donc $nMin = 1$, et $u(nMin) = 0,4$. Le u minuscule s'obtient avec shift + 7, et le n avec la touche X, T, θ, n. On va ensuite dans le menu table.



On voit que $u_6 \approx 0,499\ 97 < 0,499\ 99$ et $u_7 \approx 0,499\ 994 > 0,499\ 99$ donc cette propriété est vérifiée $\boxed{\text{pour } n \in [|7;+\infty|[}$.