Devoir maison n°15 Pour le mardi 6 mai 2014

Les deux parties sont indépendantes

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

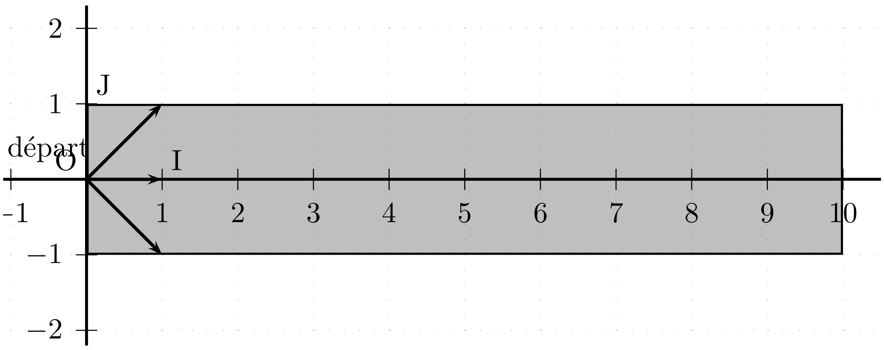
- Soit il avance d'un pas tout droit ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'évènement S ≪ Tom traverse le pont ≫ c'est-à-dire ≪ Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ≫.

Partie A : modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé (O , I, J) comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées (0 ; 0) au début de la traversée. On note (x ; y) les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

```
x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ≥ −1 et y ≤ 1 et x ≤ 9
        Affecter à n une valeur choisie au hasard entre −1, 0 et 1
        Affecter à y la valeur y + n
        Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Afficher ≪ la position de Tom est ≫ (x ; y)
```

1. On donne les couples suivants : $(-1\ ;\ 1)$; $(10 ; 0)$; $(2 ; 4)$; $(10 ; 2)$.
   Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.
2. Modifier cet algorithme pour qu'à la place de ≪ la position de Tom est (x ; y) ≫, il affiche finalement ≪ Tom a réussi la traversée ≫ ou ≪ Tom est tombé ≫.

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :
A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée -1 ».
B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».
C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».
On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Justifier que $a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9, on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{array}\right.$$

   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer les probabilités $p\left(A_1\right)$, $p\left(B_1\right)$ et $p\left(C_1\right)$.
4. Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.
5. À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul ci-contre qui donne des valeurs approchées de a_n, b_n, c_n pour n compris entre 0 et 10.
   Donner une valeur approchée à $0,001$ près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-contre).

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	0,333333	0,333333	0,333333
2	0,222222	0,333333	0,222222
3	0,185185	0,259259	0,185185
4	0,148148	0,209877	0,148148
5	0,119342	0,168724	0,119342
6	0,096022	0,135802	0,096022
7	0,077275	0,109282	0,077275
8	0,062186	0,087944	0,062186
9	0,050043	0,070772	0,050043
10	0,040272	0,056953	0,040272