Devoir maison n°2 — Pour le mardi 17 septembre 2013

A la découverte d'une nouvelle fonction

On définit une fonction f sur $I =]0;+\infty[$ par les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f(10) = 1 \\ \forall (a,b) \in I^2, f(a \times b) = f(a) + f(b) \end{cases}$$

1. Démontrer que $f(1) = 0$.
   <u>*Indication :*</u> *on pourra pour cela utiliser la seconde propriété avec des valeurs de a et b bien choisies.*
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, f(10^n) = n$.
3. Démontrer que $\forall x \in I, f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$.
   <u>*Indication :*</u> *on pourra pour cela utiliser la seconde propriété avec des valeurs de a et b bien choisies.*
4. Déduire de la question 3 que $\forall (a,b) \in I^2, f\left(\dfrac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$
5. On admet que $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, f(x^n) = nf(x)$ (ce résultat se démontrerait par récurrence exactement comme en question 2).
   Déduire de ce résultat que $\forall m \in \mathbb{N}^*, f\left(10^{\frac{1}{m}}\right) = \dfrac{1}{m}$.
   <u>*Indication :*</u> *on pourra utiliser la propriété admise avec $x = 10^{\frac{1}{m}}$ et une valeur de n bien choisie*
6. Déduire des questions 2 et 3 que $\forall z \in \mathbb{Z}, f(10^z) = z$.
   <u>*Indication :*</u> *on pourra distinguer deux cas : $z \in \mathbb{N}$ et $z \notin \mathbb{N}$, puis poser $n = -z$ dans ce second cas*
7. On admet que $\forall z \in \mathbb{Z}^*, f\left(10^{\frac{1}{z}}\right) = \dfrac{1}{z}$ (ce résultat se démontrerait à partir des questions 3 et 5, comme précédemment).
   Déduire de ce résultat et de la question 6 que $\forall q \in \mathbb{Q}, f(10^q) = q$.
   <u>*Indication :*</u> *écrire que, si $q \in \mathbb{Q}$, alors $\exists (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$ tels que $q = \dfrac{n}{m}$*
8. Tracer la courbe de la fonction f. Expliquer la démarche suivie.
   On prendra comme unités graphiques 1 cm en abscisse et 5 cm en ordonnées.

Devoir maison n°2 — Pour le mardi 17 septembre 2013

A la découverte d'une nouvelle fonction

On définit une fonction f sur $I =]0;+\infty[$ par les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f(10) = 1 \\ \forall (a,b) \in I^2, f(a \times b) = f(a) + f(b) \end{cases}$$

1. Démontrer que $f(1) = 0$.
   <u>*Indication :*</u> *on pourra pour cela utiliser la seconde propriété avec des valeurs de a et b bien choisies.*
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, f(10^n) = n$.
3. Démontrer que $\forall x \in I, f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$.
   <u>*Indication :*</u> *on pourra pour cela utiliser la seconde propriété avec des valeurs de a et b bien choisies.*
4. Déduire de la question 3 que $\forall (a,b) \in I^2, f\left(\dfrac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$
5. On admet que $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, f(x^n) = nf(x)$ (ce résultat se démontrerait par récurrence exactement comme en question 2).
   Déduire de ce résultat que $\forall m \in \mathbb{N}^*, f\left(10^{\frac{1}{m}}\right) = \dfrac{1}{m}$.
   <u>*Indication :*</u> *on pourra utiliser la propriété admise avec $x = 10^{\frac{1}{m}}$ et une valeur de n bien choisie*
6. Déduire des questions 2 et 3 que $\forall z \in \mathbb{Z}, f(10^z) = z$.
   <u>*Indication :*</u> *on pourra distinguer deux cas : $z \in \mathbb{N}$ et $z \notin \mathbb{N}$, puis poser $n = -z$ dans ce second cas*
7. On admet que $\forall z \in \mathbb{Z}^*, f\left(10^{\frac{1}{z}}\right) = \dfrac{1}{z}$ (ce résultat se démontrerait à partir des questions 3 et 5, comme précédemment).
   Déduire de ce résultat et de la question 6 que $\forall q \in \mathbb{Q}, f(10^q) = q$.
   <u>*Indication :*</u> *écrire que, si $q \in \mathbb{Q}$, alors $\exists (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$ tels que $q = \dfrac{n}{m}$*
8. Tracer la courbe de la fonction f. Expliquer la démarche suivie.
   On prendra comme unités graphiques 1 cm en abscisse et 5 cm en ordonnées.