A la découverte d'une nouvelle fonction : la fonction *log*

On définit une fonction f sur $I =]0; +\infty[$ par les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f(10) = 1 \\ \forall (a,b) \in I^2, f(a \times b) = f(a) + f(b) \end{cases}$$

1. On connaît $f(10)$ et on souhaite connaître $f(1)$. On peut utiliser la seconde propriété avec $a = 1$ et $b = 10$: $f(1 \times 10) = f(1) + f(10)$ ce qui nous donne $1 = f(1) + 1$ d'où $\boxed{f(1) = 0}$.
   Remarque : cette démonstration fonctionnait avec une valeur quelconque de b.
2. *Propriété à démontrer :* $P(n)$: « $f(10^n) = n$ ».
   Initialisation : pour $n = 0$, le membre de gauche vaut $f(10^0) = f(1) = 0$, qui est bien égal au membre de droite.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie et démontrons $P(n+1)$.
   $$\begin{aligned} f(10^{n+1}) &= f(10^n \times 10^1) && \\ &= f(10^n) + f(10) && \text{D'après la seconde propriété} \\ &= n + 1 && \text{D'après l'hypothèse de récurrence et la première propriété} \end{aligned}$$
   Conclusion : On vient de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(10^n) = n$
3. Soit $x \in I$. Afin de faire apparaître à la fois $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(x)$ dans une formule, et à l'aide de l'indication, on peut penser à calculer :
   $$\begin{aligned} f\left(x \times \frac{1}{x}\right) &= f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) && \\ f(1) &= f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) && \text{Simplification} \\ 0 &= f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) && \text{D'après la question 1} \\ -f(x) &= f\left(\frac{1}{x}\right) && -f(x) \end{aligned}$$
4. Soit maintenant $(a,b) \in I^2$.
   $$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{b}\right) &= f\left(a \times \frac{1}{b}\right) && \\ &= f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) && \text{D'après la seconde propriété} \\ &= f(a) - f(b) && \text{D'après la question 3} \end{aligned}$$
5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. De la même manière que précédemment, on peut penser à utiliser une puissance n qui permette de simplifier $\left(10^{\frac{1}{m}}\right)^n = 10^{n \times \frac{1}{m}} = 10^{\frac{n}{m}}$. On n'a pas trop le choix, on va prendre $n = m$, afin de faire apparaître 10 dont on connaît l'image.
   Ainsi $f\left(\left(10^{\frac{1}{m}}\right)^m\right) = f(10) = 1$ d'après notre calcul introductif, et $f\left(\left(10^{\frac{1}{m}}\right)^m\right) = m \times f\left(10^{\frac{1}{m}}\right)$ d'après la propriété admise.
   Ainsi $1 = m \times f\left(10^{\frac{1}{m}}\right)$, d'où le résultat demandé.
6. Soit $z \in \mathbb{Z}$. Comme l'énoncé nous l'indique, distinguons deux cas.
   - Si $z \in \mathbb{N}$, alors d'après la question 2, on a bien $f(10^z) = z$.
   - Si $z \notin \mathbb{N}$, alors posons $n = -z$, qui lui est un entier naturel.
   $$\begin{aligned} f(10^z) &= f(10^{-n}) && \\ &= f\left(\frac{1}{10^n}\right) && \text{Car } a^{-b} = \frac{1}{a^b} \\ &= -f(10^n) && \text{D'après la question 3} \\ &= -n && \text{D'après la question 2} \\ &= z && \text{D'après la définition de } n \end{aligned}$$

7. Soit $q \in \mathbb{Q}$. Posons comme nous l'indique l'énoncé $q = \dfrac{n}{m}$ avec $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$, et essayons de comprendre comment cela nous aide à calculer $f(10^q)$:

$$\begin{aligned}
f(10^q) &= f(10^{\frac{n}{m}}) \\
&= f(10^{n \times \frac{1}{m}}) && \text{Car } \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \\
&= f\left(\left(10^{\frac{1}{m}}\right)^n\right) && \text{Car } 10^{ab} = (10^a)^n \\
&= n \times f\left(10^{\frac{1}{m}}\right) && \text{D'après la propriété admise en question 5} \\
&= n \times \frac{1}{m} && \text{D'après la propriété admise dans l'énoncé de cette question} \\
&= \frac{n}{m} && \text{Car } \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \\
&= q && \text{Par définition de } q
\end{aligned}$$

8. Afin de tracer $\mathcal{C}_f$, nous allons rédiger un tableau de valeurs :

x	1	10	$10^{-1} = 0,1$	$10^{0,5} \approx 3,16$	$10^{1,1} \approx 12,59$	$10^{0,3} \approx 2$	$10^{0,8} \approx 6,31$
$f(x)$	0	1	-1	0,5	1,1	0,3	0,8