Devoir maison n°3 — Pour le mardi 1^{er} octobre 2013

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ et soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + px + q$.
   (a) Montrer que si $p \geq 0$, la fonction f n'a ni maximum local ni minimum local. (On pourra étudier les variations de f.)
   (b) Montrer que si $p < 0$, la fonction f admet exactement un minimum local (que l'on note m) et exactement un maximum local (que l'on note M). Montrer alors que $m \times M = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$.
2. On considère maintenant cette fonction f avec un nombre $p < 0$. On souhaite résoudre, pour x réel, l'équation $E : f(x) = 0$.
   (a) Montrer, en s'appuyant sur le tableau de variations de f, que :
      - Si $m < M < 0$ ou si $0 < m < M$, E a une unique solution réelle.
      - Si $m = 0$ ou si $M = 0$, E a exactement deux solutions réelles.
      - Si $m < 0 < M$, E a exactement trois solutions réelles.
   (b) Déduire des questions précédentes que l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet exactement trois solutions réelles ssi $4p^3 + 27q^2 < 0$.
   (c) En déduire le nombre de solutions réelles des équations :

$$x^3 + 2x - 5 = 0 \qquad x^3 - 3x + 3 = 0 \qquad x^3 - 3x + 2 = 0 \qquad x^3 - 3x + 1 = 0$$

3. On considère maintenant $(b,c,d) \in \mathbb{R}^3$ et on souhaite résoudre l'équation $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ d'inconnue x.
   (a) Pour aider à résoudre cette équation, on pose une nouvelle inconnue X telle que $x = X - \dfrac{b}{3}$. Montrer que l'équation en X associée ne comporte pas de terme en X^2.
   (b) On vient donc de se ramener à une équation en X du type de celles résolues à la question précédente. Il est évident que cette équation en X a autant de solutions que l'équation en x associée. A l'aide de ce changement d'inconnue, déduire le nombre de solutions des équations suivantes :

$$x^3 - x^2 + 2x - 7 = 0 \qquad x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0 \qquad x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$$

Devoir maison n°3 — Pour le mardi 1^{er} octobre 2013

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ et soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + px + q$.
   (a) Montrer que si $p \geq 0$, la fonction f n'a ni maximum local ni minimum local. ((On pourra étudier les variations de f.)
   (b) Montrer que si $p < 0$, la fonction f admet exactement un minimum local (que l'on note m) et exactement un maximum local (que l'on note M). Montrer alors que $m \times M = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$.
2. On considère maintenant cette fonction f avec un nombre $p < 0$. On souhaite résoudre, pour x réel, l'équation $E : f(x) = 0$.
   (a) Montrer, en s'appuyant sur le tableau de variations de f, que :
      - Si $m < M < 0$ ou si $0 < m < M$, E a une unique solution réelle.
      - Si $m = 0$ ou si $M = 0$, E a exactement deux solutions réelles.
      - Si $m < 0 < M$, E a exactement trois solutions réelles.
   (b) Déduire des questions précédentes que l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet exactement trois solutions réelles ssi $4p^3 + 27q^2 < 0$.
   (c) En déduire le nombre de solutions réelles des équations :

$$x^3 + 2x - 5 = 0 \qquad x^3 - 3x + 3 = 0 \qquad x^3 - 3x + 2 = 0 \qquad x^3 - 3x + 1 = 0$$

3. On considère maintenant $(b,c,d) \in \mathbb{R}^3$ et on souhaite résoudre l'équation $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ d'inconnue x.
   (a) Pour aider à résoudre cette équation, on pose une nouvelle inconnue X telle que $x = X - \dfrac{b}{3}$. Montrer que l'équation en X associée ne comporte pas de terme en X^2.
   (b) On vient donc de se ramener à une équation en X du type de celles résolues à la question précédente. Il est évident que cette équation en X a autant de solutions que l'équation en x associée. A l'aide de ce changement d'inconnue, déduire le nombre de solutions des équations suivantes :

$$x^3 - x^2 + 2x - 7 = 0 \qquad x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0 \qquad x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$$