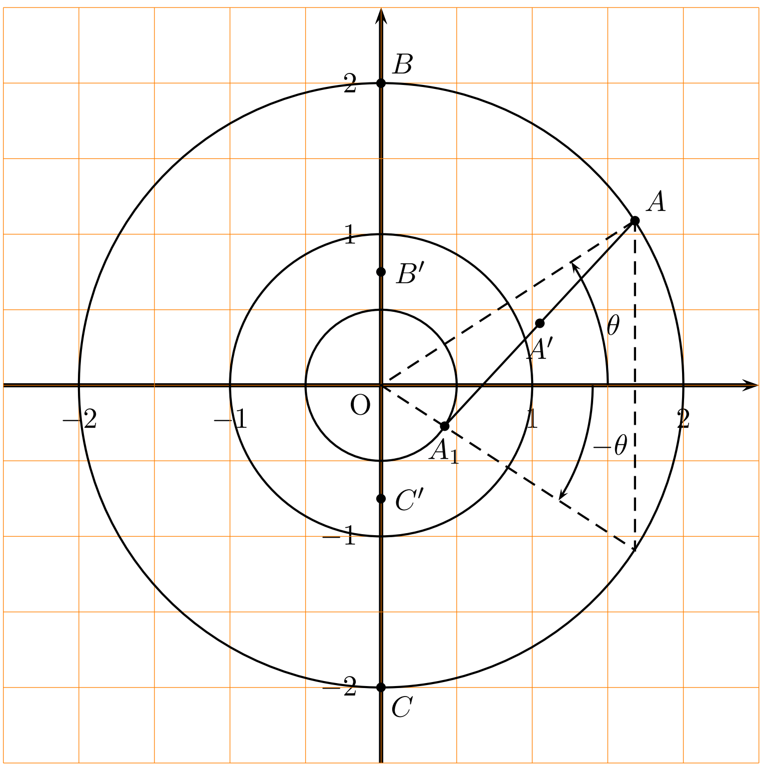
Exercice n°96 p.47

1. $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$: la plupart des termes se simplifient dans cette différence !
   Effectivement la première somme va de $n+1$ à $2n+2$ et la seconde somme va de n à $2n$, donc tous les termes de $n+1$ à $2n$ vont se simplifier. Pour mieux le voir, réécrivons les deux sommes :
   $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$
   Ainsi $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{(2n+2)n}{(2n+1)(2n+2)n} + \dfrac{(2n+1)n}{(2n+2)(2n+1)n} - \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{n(2n+2)(2n+1)}$
   $= \dfrac{(2n+2)n + (2n+1)n - (2n+2)(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)n} = \dfrac{2n^2 + 2n + 2n^2 + n - (4n^2 + 2n + 4n + 2)}{(2n+1)(2n+2)n}$
   $= \dfrac{4n^2 + 3n - 4n^2 - 6n - 2}{(2n+1)(2n+2)n} = \dfrac{-3n-2}{(2n+1)(2n+2)n}$.
2. Il suffit maintenant d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour déduire le sens de variation de la suite u. On a déjà la forme factorisée, et c'est ici très simple : le numérateur est strictement négatif, le dénominateur strictement positif. Ainsi, $\forall n, u_{n+1} - u_n < 0$, donc $\boxed{u \text{ est strictement décroissante}}$.
3. Nous pouvons remarquer que u est minorée. Effectivement, pour tout n, u_n est la somme de plusieurs termes tous positifs donc est un nombre positif. Ainsi u est minorée par 0.
   Puisque u est également décroissante, on peut donc en conclure que $\boxed{u \text{ est convergente}}$ (on peut simplement ajouter que sa limite est positive, on ne peut en déduire sa valeur).

Exercice n°110 p.260

1. (a) Pour M d'affixe $z \neq 0$, $OM \times OM_1 = |z| \times \left|\dfrac{1}{z}\right| = |z| \times \dfrac{1}{|z|} = 1$.
   Si on note $\theta = (\overline{u}; \overline{OM})$, alors $\theta = arg(z)$ donc $arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\theta$. C'est exactement ce qu'on voulait démontrer car l'affixe de M_1 est $\dfrac{1}{z}$ donc $(\overline{u}; \overline{OM_1}) = arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\theta$.
   (b) $OA = 2$ donc $OA_1 = 0,5$, on a donc tracé le cercle de rayon $0,5$.



2. (a) M' est le milieu de MM_1 donc $z_{M'} = \dfrac{z_M + z_{M_1}}{2} = \dfrac{z + \frac{1}{z}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

   (b) $z_{B'} = \dfrac{1}{2}\left(z_B + \dfrac{1}{z_B}\right) = \dfrac{1}{2}\left(2i + \dfrac{1}{2i}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2i \times 2i}{2i} + \dfrac{1}{2i}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{-4+1}{2i} = \dfrac{-3}{4i} = \dfrac{-3i}{4i \times i} = \dfrac{3i}{4}$.

   $z_{C'} = \dfrac{1}{2}\left(z_C + \dfrac{1}{z_C}\right) = \dfrac{1}{2}\left(-2i + \dfrac{1}{-2i}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-2i \times 2i}{2i} + \dfrac{-1}{2i}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{4-1}{2i} = \dfrac{3}{4i} = \dfrac{3i}{4i \times i} = \dfrac{-3i}{4}$.

   (c) Cf. figure.

3. La question est équivalente à résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) && \downarrow \times 2\\
2z &= z + \frac{1}{z} && \downarrow -z\\
z &= \frac{1}{z} && \downarrow \times z\\
z^2 &= 1 && \downarrow \text{Résolution}\\
z &= \pm 1
\end{aligned}$$

   Ainsi il y a deux solutions à l'équation, il y a donc deux points qui correspondent : les points d'affixe 1 et -1 donc l'ensemble cherché est l'ensemble $\boxed{\{(1;0);(-1;0)\}}$.

4. Si M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 (donc le cercle trigonométrique), alors z peut s'écrire $e^{i\theta}$ (avec $\theta = arg(z)$).

   Alors $z' = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \dfrac{1}{e^{i\theta}}\right) = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \dfrac{1}{2}(\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

   $= \dfrac{1}{2}(\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta)) = \dfrac{1}{2}(2\cos(\theta)) = \cos(\theta)$.

   Ainsi l'affixe de M' est entre -1 et 1 et l'ordonnée de M' vaut 0. Ce qui revient exactement à dire que $M' \in [KL]$.