Exercice 1 - Algorithme de dichotomie

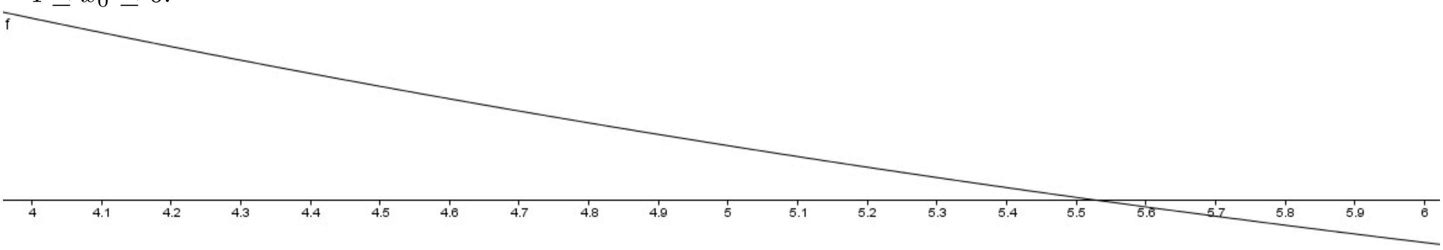
But de l'algorithme : trouver une valeur approchée de la solution (appelée x_0) d'une équation de type $f(x) = 0$, quand on travaille avec un intervalle sur lequel il y a une unique solution à cette équation.

Hypothèses sur la fonction f : l'expression $f(x)$ est trop compliquée pour que l'on puisse résoudre l'équation "à la main". Par contre, il faut que f soit strictement monotone (croissante ou décroissante) sur l'intervalle considéré.

Méthode : on va trouver une valeur approchée de x_0 en réalisant des encadrements de plus en plus précis. L'algorithme consiste à recommencer les deux points suivants jusqu'à ce que la précision soit jugée suffisante :

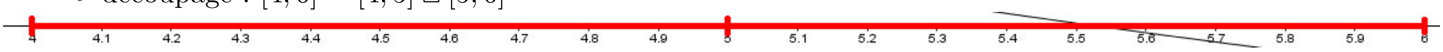
- couper l'intervalle d'étude en deux sous-intervalles de même longueur
- prendre comme nouvel intervalle d'étude le sous-intervalle qui contient la solution

Exemple : soit f dont la courbe est la suivante. Le premier intervalle d'étude est $[4; 6]$ et on a donc $4 \leq x_0 \leq 6$.



Etape 1

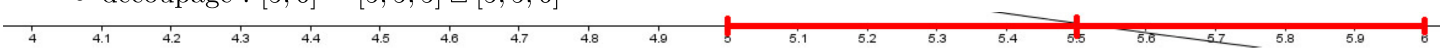
- découpage : $[4; 6] = [4; 5] \sqcup [5; 6]$



- le nouvel intervalle d'étude est $[5; 6]$ (donc $5 \leq x_0 \leq 6$)

Etape 2

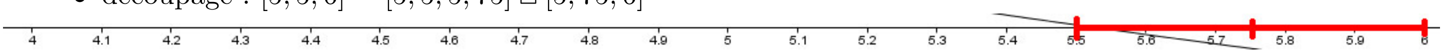
- découpage : $[5; 6] = [5; 5,5] \sqcup [5,5; 6]$



- le nouvel intervalle d'étude est $[5,5; 6]$ (donc $5,5 \leq x_0 \leq 6$)

Etape 3

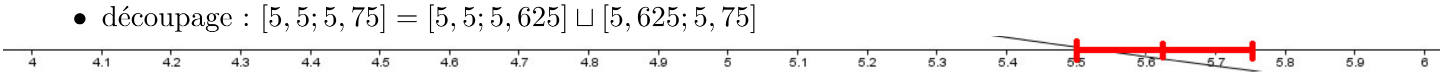
- découpage : $[5,5; 6] = [5,5; 5,75] \sqcup [5,75; 6]$



- le nouvel intervalle d'étude est $[5,5; 5,75]$ (donc $5,5 \leq x_0 \leq 5,75$)

Etape 4

- découpage : $[5,5; 5,75] = [5,5; 5,625] \sqcup [5,625; 5,75]$



- le nouvel intervalle d'étude est $[5,5; 5,625]$ (donc $5,5 \leq x_0 \leq 5,625$)

etc.

Notations : dans l'algorithme, au fur et à mesure on va appeler a et b les bornes respectivement inférieure et supérieure de l'intervalle sur lequel on travaille. A chaque fois qu'on coupe l'intervalle de travail en deux, on va appeler m le nombre du milieu.

Dans l'exemple, au début $a = 4$; $b = 6$. Quand on coupe en deux on a donc $m = 5$. On change alors d'intervalle ce qui donne $a = 5$ et b reste inchangé. Quand on recoupe en deux on a alors $m = 5,5$, etc.

Pour savoir sur quel intervalle travailler (et quelle borne changer), il suffit de comparer les signes de $f(a)$ et $f(m)$. S'ils ont même signe, alors c'est que la solution est sur $[m; b]$: on change donc la valeur de a. Sinon c'est que la solution est sur $[a; m]$: on change donc la valeur de b. (Rappel : deux nombres ont le même signe ssi leur produit est positif, c'est donc le test effectué par l'algorithme.)

Application : recherche de la solution de $F_1(x) = 0$ dans l'intervalle $[0; 1]$ avec $F_1 : x \mapsto x^3 + 2x - 2$. Dans Algobox, se servir de l'onglet "Utiliser une fonction numérique" et rentrer la formule suivante : $x * x * x + 2 * x - 2$ (on ne peut pas rentrer $x \wedge 3 + 2x - 2$ comme sur les calculatrices puisque ce n'est pas comme ça qu'Algobox interprète les accents circonflexes. En revanche on peut rentrer $pow(x, 3) + 2 * x - 2$)

Algorithme exercice 1.

Variables :
a, b et m sont trois nombres réels.

Corps de l'algorithme :

```
a ← 0
b ← 1
Tant que (b − a) > 0,01
        m ← (a + b)/2
        Si F1(m) × F1(a) ≥ 0, alors
                a ← m
        Sinon
                b ← m
        Fin du Si
Fin du Tant Que
Afficher le message "La solution est comprise entre "
Afficher la variable a
Afficher le message " et "
Afficher la variable b
```

1. Expliquer pourquoi il y a bien un unique endroit où la fonction F_1 s'annule sur $[0; 1]$.
2. Proposer (et remplir) un tableau des valeurs des variables a, b et m au fur et à mesure de l'algorithme.
3. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution de $F_1(x) = 0$ dans l'intervalle $[0; 1]$.

Exercice 2 - Symbole somme

1. Ecrire avec le symbole $\sum$ la somme suivante : $S = 1 + 4 + 9 + \cdots + 196$.
2. Quelle valeur doit-on saisir pour N pour que l'algorithme suivant affiche cette somme ?

Algorithme exercice 2.

Variables :
N, I et S sont trois nombres entiers.

Corps de l'algorithme :

```
Afficher "Donnez-moi un entier positif : "
Saisir N
S ← 0
Pour I allant de 1 à N
        S ← S + I × I
Fin du Pour
Afficher la variable S
```

3. Proposer un algorithme similaire pour calculer le produit $N! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times N$ quand l'utilisateur saisit la valeur de N.