Exercice n°64 p.71

1. (a) L'implication est $\boxed{\text{vraie}}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   (b) La réciproque est : ≪ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\forall x \geq 0, f(x) \geq \sqrt{x}$ ≫
   (c) Cette réciproque est $\boxed{\text{fausse}}$: par exemple la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{2}$ tend vers $+\infty$ mais n'est pas toujours plus grande que la fonction racine (elle n'est même jamais strictement plus grande que la fonction racine)
2. (a) L'implication est $\boxed{\text{vraie}}$: c'est le théorème des gendarmes.
   (b) La réciproque est : ≪ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ ≫
   (c) Cette réciproque est $\boxed{\text{fausse}}$: par exemple la fonction $f : x \mapsto 0$ tend vers 0, est majorée par la fonction $h : x \mapsto x$ sur $[0; +\infty[$ mais h ne tend pas vers 0.
3. (a) L'implication est $\boxed{\text{fausse}}$: par ex. la fonction sin est bornée mais n'admet pas de limite en $+\infty$.
   (b) La réciproque est : ≪ Si f admet une limite finie ℓ en $+\infty$, alors f est bornée ≫
   (c) Cette réciproque est $\boxed{\text{fausse}}$: par exemple la fonction inverse admet une limite finie (0) en $+\infty$, mais n'est pas bornée (puisqu'elle tend vers $+\infty$ en 0^+).

   Remarque hors programme : en fait si l'ensemble de définition de f était fermé à gauche (par exemple. $[1; +\infty[$), et si f était continue, alors f aurait forcément été bornée (une fonction continue sur un intervalle fermé borné y est bornée, et ensuite au voisinage de l'infini vu qu'elle est convergente elle est bornée également). Ce résultat n'est pas au programme, mais on admettra une partie de ce résultat pour démontrer un résultat qui, lui, est au programme, un peu plus tard dans l'année.

Exercice n°76 p.72

1. En faisant un dessin, on voit bien que si on prend une fonction strictement décroissante, on n'est pas obligés d'avoir une limite de $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
   Un contre-exemple facile est de prendre $a = 1$ (ou n'importe quel nombre strictement positif) et la fonction inverse : elle est strictement décroissante sur $[a; +\infty[$ mais a pour limite 0.
   Ainsi, l'implication de l'énoncé est fausse.
2. Dans le cours, on a vu que ≪ $\dfrac{-\infty}{+\infty}$ ≫ est une forme indéterminée : c'est donc clairement qu'on n'a pas toujours -1 comme limite pour $\dfrac{f}{g}$ pour toutes les fonctions f et g qui ont pour limites respectivement $-\infty$ et $+\infty$!
   Par exemple :
   - $f(x) = -2x$ et $g(x) = x$ vérifient les limites de l'énoncé, et pourtant $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{-2x}{x} = -2$ donc tend vers -2 et pas vers -1.
   - $f(x) = -x$ et $g(x) = x^2$ vérifient les limites de l'énoncé, et pourtant $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{-x}{x^2} = -\dfrac{1}{x}$ donc tend vers 0 et pas vers -1.
   - $f(x) = -x^2$ et $g(x) = x$ vérifient les limites de l'énoncé, et pourtant $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{-x^2}{x} = -x$ donc tend vers $-\infty$ et pas vers -1.

   L'implication de l'énoncé est donc fausse.

3. On souhaite étudier la limite de $\frac{f(x)}{x}$. La seule chose que l'on connaisse sur f est un encadrement. Partons donc de cet encadrement, et voyons ce que l'on peut en faire :
   $\forall x \in [0; +\infty[, 0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$

   On peut alors diviser chaque membre de l'inéquation par x (pour faire apparaître $\frac{f(x)}{x}$) lorsque $x \neq 0$ c'est-à-dire sur $]0; +\infty[$, il vient alors :
   $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{0}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x}$

   On peut maintenant simplifier les différents membres de cette double inégalité, il vient alors :
   $\forall x \in]0; +\infty[, 0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

   On peut maintenant clairement appliquer le théorème des gendarmes, puisque cette inégalité est valable au voisinage de $+\infty$:
   $\underset{x \to +\infty}{lim} 0 = \underset{x \to +\infty}{lim} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc $\underset{x \to +\infty}{lim} \frac{f(x)}{x} = 0$.

   Ainsi l'implication de l'énoncé est vraie.

4. La plupart du temps où une fonction n'est pas définie en un nombre, c'est parce que son expression a en ce nombre un réel « problème » de définition (par ex. la fonction inverse n'est pas définie en 0 car 0 n'admet pas d'inverse). Cela dit, rien n'empêche de choisir une fonction dont l'expression n'a « aucun problème », et de choisir d'enlever un nombre à son ensemble de définition.

   Ainsi, par exemple, je peux définir une fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par l'expression $f(x) = 1$. Cette fonction n'a pas d'asymptote verticale (puisqu'il n'y a pas de limite infinie en $0^{\pm}$), et est donc un contre-exemple à l'implication de l'énoncé, qui est donc fausse.

   Pour dessiner une telle fonction, on se souvient qu'il faut mettre une parenthèse ouverte au bord de la courbe, là où on ne veut pas qu'il y ait de point sur la courbe de la fonction.